

**CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR QUE  
ENSINA MATEMÁTICA EM CONTEXTO FORMATIVO DE *LESSON STUDY***

Beatriz F. Litoldo  
beatrizfernanda\_rc@hotmail.com

Miguel Ribeiro  
cmribas78@gmail.com

**Resumo:**

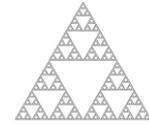
Com o intuito de melhor entender o conteúdo do conhecimento do professor de matemática, assumimos como essencial considerar as especificidades desse conhecimento, tanto no que se refere aos conteúdos como à componente didático-pedagógica. Nesse sentido o conhecimento do professor é considerado especializado e essa especialização tem como base a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Tendo como objetivo obter elementos que possibilitam identificar e melhor entender o conteúdo do conhecimento especializado do professor de matemática, nesta comunicação focamos-nos nos subdomínios do conhecimento do conteúdo e como alguns desses conhecimentos de um professor dos Anos Finais do Ensino Fundamental se vão elaborando pelas discussões ocorridas em um contexto de um *Lesson Study* que nos encontramos a desenvolver no Grupo de Sábado. Apresenta-se e discutem-se algumas evidências e indícios de aspetos desse conhecimento especializado ao tema de frações, mais especificamente subtração de duas quantidades fracionárias.

**Palavras-chave:** Mathematics Teachers Specialized Knowledge, Formação de Professores, Lesson Study, Subtração de frações.

**Palavras iniciais**

A reflexão do professor, tendo por base a prática e o que se antecipa que ocorrerá conjugado com o que ocorreu, configura-se como um dos aspetos essenciais com potencialidades de contribuir para a melhoria dessa prática (SCHÖN, 1983) e, necessariamente, das aprendizagens dos alunos, sempre e quando essa reflexão esteja associada a alguma problematização e discussão de momentos matematicamente críticos (RIBEIRO; CARRILLO, 2011).

De entre os vários temas matemáticos, os racionais e em particular a representação em fração configuram-se como situações matematicamente críticas tanto nas aprendizagens dos alunos (BEHR, *et al.*, 1983) quanto na prática e conhecimento do professor (PINTO; RIBEIRO, 2013). Assim, debater e refletir sobre a prática (própria ou de outrem) é fundamental para uma sua mais plena compreensão no sentido de pensar em formas que contribuam para uma sua melhoria. Nesse e para esse processo o conhecimento (matemático)



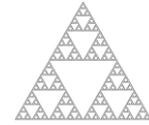
do professor sobre determinado tema é um elemento central também para as aprendizagens dos alunos e, nesse sentido torna-se fulcral obter mais informações e entendimentos relacionados, por exemplo, os porquês associados ao que se faz e porque se faz em cada um desses temas e as suas relações com os demais. O entendimento destes porquês matemáticos é um dos aspectos que torna o conhecimento do professor especializado (CARRILLO *et al.*, 2013; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2013), especialização essa que transcende a dimensão pedagógica, incorporando a dimensão do conhecimento do conteúdo.

Buscando obter uma mais ampla compreensão sobre o conhecimento especializado do professor no tema das frações, e em particular relativamente à subtração de duas quantidades representadas em fração, apresentamos e discutimos um episódio de discussão e reflexão sobre a prática (nos Anos Finais do Ensino Fundamental). Efetuamos uma análise com foco no conhecimento matemático especializado revelado por um dos participantes do grupo ao resolver e tentar justificar os porquês do que se faz e como se faz para subtrair duas quantidades representadas fração, sem usar o algoritmo do MMC (Mínimo Múltiplo Comum).

### **Alguns aspectos teóricos**

De acordo com São Paulo (2011) o conteúdo de frações é introduzido para os alunos no 6º ano com o objetivo de desenvolver a compreensão do significado das representações de medidas não inteiras (números fracionários) bem como, dar significado às equivalências de frações associadamente com as operações de adição e subtração. No entanto, a representação fracionária já aparece nos anos anteriores, a medida em que os alunos começam a ter o contato com os números racionais, e continua ao longo da vida escolar, permeando transversalmente outros conteúdos da matemática. De acordo com Behr *et al.*, (1983) os significados dos números fracionários são um dos temas mais complexos e importantes que as crianças encontram no decurso de sua escolaridade, além se ser um dos conceitos mais problemáticos da matemática, tanto para os alunos como para os professores.

As dificuldades de entendimento dos alunos relativos ao conteúdo de fração, principalmente sobre seus diferentes significados e operações, podem estar relacionadas ao conhecimento que os professores têm com relação a essa temática, sobretudo, o quão acentuado e detalhado é este conhecimento. As limitações de compreensão e interpretação sobre frações encontradas pelos professores, podem ser resultados de uma formação

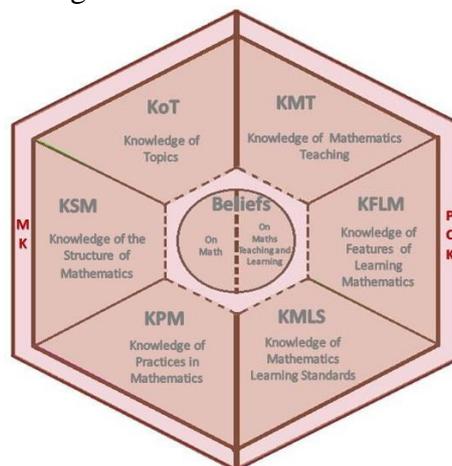


limitada, em que tal assunto não foi explorado com a devida atenção e nem direcionado para o seu próprio conhecimento (RIBEIRO; JAKOBSEN, 2012).

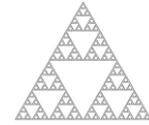
Relacionar as dificuldades dos alunos com as limitações do conhecimento do professor acerca do tema de frações é importante, à medida em que se pode direcionar estudos com o foco aprofundado no conhecimento sobre frações, de modo a melhor entender esse conhecimento e poder, a partir dele, propor formas de melhoria no ensino e aprendizagem dos alunos. Assim, tendo como ponto de partida o conhecimento do professor de matemática, e refinando trabalhos de autores que apresentaram conceitualizações nesta linha de pesquisa (por exemplo, Ball; Thames; Phelps, 2008; Rowland; Huckstep; Thwaites, 2005), assumimos a perspectiva do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO *et al.*, 2013) que considera todo o conhecimento do professor especializado (Figura 1).

O MTSK apresenta dois domínios do conhecimento do professor, *Mathematical Knowledge* (MK) e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), subdivididos cada um deles em três subdomínios. Considera, ainda, as crenças do professor tanto em relação à matemática como em relação ao ensino e aprendizagem da mesma. Atendendo ao foco deste texto, iremos direcionar a nossa atenção para domínio do MK. Tal domínio, de acordo com Flores-Medrano *et al.*, (2014), constitui-se pelo conhecimento aprofundado que o professor de matemática tem em relação à própria matemática, como sendo uma disciplina científica dentro do contexto escolar. O MK é composto por três subdomínios, o *Knowledge of Topics* (KoT); *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM); *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM).

Figura 1 – Estrutura do MTSK.



Fonte: (MUÑOZ-CATALÁN *et al.*, 2015)



O KoT contempla o conhecimento dos temas matemáticos, envolvendo o conhecimento sobre os procedimentos (como se faz, quando se faz, por que se faz e que tipo de resultado se obtém quando se opta por um procedimento em detrimento de outro), o conhecimento associado às definições e registros de representação e as possibilidades de gerar/aplicar conhecimentos, a partir daquilo que já se conhece (uso das propriedades de potenciação para operar com os logaritmos, por exemplo), o *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) aborda o conhecimento da base e da fundamentação da matemática, bem como o conhecimento de suas relações entre os diferentes conteúdos (da matemática e outros) e por último, o *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM) que se refere ao conhecimento do fazer matemática, no sentido de deter o conhecimento das diferentes maneiras que se tem ao alcançar os resultados matemáticos (demonstrações e definições, correspondências e equivalências, generalizações etc).

### **Contexto e método**

O Grupo de Sábado (GdS) é um grupo de trabalho, com foco na prática do professor que ensina matemática, que integra professores de diferentes etapas educativas – desde a Educação Infantil ao Ensino Superior -, futuros professores e pesquisadores. Este grupo teve origem em 1999 e um dos aspetos particulares do grupo é o fato de os participantes discutirem e refletirem sobre alguns aspetos da prática, compartilhando suas experiências.

Atualmente o grupo encontra-se desenvolvendo um projeto financiado pela FAPESP intitulado *Lesson Study: conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática*, e tem como interesse dois objetivos, o formativo, que visa o desenvolvimento profissional do professor refletindo na melhoria do ensino-aprendizagem da matemática na escola, e o investigativo, que pretende compreender como ocorre a aprendizagem docente e o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática, além de inquirir sobre a melhoria do ensino e da aprendizagem matemática dos alunos de diversas escolas públicas localizadas no Estado de São Paulo.

Na literatura, o LS é descrito tradicionalmente pela constituição de quatro etapas: planejamento de uma aula, execução dessa aula, sua análise e, por último, a retomada do plano – momento de aprimorar a proposta inicial da aula (DOIG; GROVES, 2011). Todos esses momentos culminam para o objetivo de “criar condições para uma maior compreensão

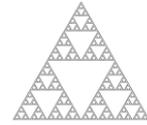


dos processos de aprendizagem dos alunos por parte dos professores e, em termos gerais, para o seu desenvolvimento profissional” (BAPTISTA *et al.*, 2012, p. 493). No entanto, pelo contexto específico do GdS e pelos objetivos do projeto, o *Lesson Study* foi adaptado prevendo um ciclo que será composto por seis etapas: I) identificação de uma questão ou dificuldade por parte dos professores escolares, II) estudo e discussão da problemática trazida por eles, III) planejamento e preparação coletiva das atividades em pequenos grupos (formados de acordo com a etapa educativa dos professores), IV) implementação com os alunos de uma dada professor com observação e registro da aula, V) socialização e reflexão coletiva dos acontecimentos dessa implementação e VI) estudo sistematizado da experimentação de todas as fases anteriores.

O foco de estudo que consideramos no LS contempla três subgrupos (Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) e refere-se ao denominado conhecimento interpretativo e conhecimento especializado do professor que ensina matemática e às suas interpelações, relações e conexões em diferentes momentos da prática do professor. Esse foco de pesquisa encontra-se associado ao estudo do desenvolvimento profissional dos participantes e considera, portanto, o conhecimento matemático do conteúdo e didático pedagógico do conteúdo. Esse ambiente de trabalho busca poder permitir que os participantes possam desenvolver um trabalho de caráter colaborativo onde o processo de reflexão sobre a prática, em interação com a experiência partilhada, proporciona momentos de desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos professores (COELHO, 2014).

Os dados de investigação utilizado para se analisar neste artigo foram provenientes da observação direta e gravação de vídeo e áudio de uma das reuniões de trabalho onde professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental discutiam acerca do conceito de subtração de frações. O tema frações emergiu em virtude de questionamentos de alguns professores do grupo com respeito às dificuldades encontradas por eles no momento de se trabalhar frações com os alunos, visto que alguns deles estavam abordando tal tema em sala de aula.

Assim, num primeiro momento, discussões sobre o significado de frações, frações equivalentes e comparações de frações movimentaram o grupo a retomar esses conceitos e compartilhá-los com os demais. O assunto comparação de fração tomou espaço e gerou incômodos entre os professores, principalmente quando estes foram questionados com



respeito a justificação dos algoritmos de soma e subtração (MMC) e possíveis resoluções por meios geométricos.

Nessa direção, um professor ao observar, por exemplo, uma situação em que seja necessário resolver a subtração  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$  deve possuir o conhecimento que permite a eles compreender as correspondências matemáticas envolvidas nessa situação, resgatando as conexões dos cálculos, das definições, das propriedades e das possíveis estratégias de resolução (conhecimento da definição de subtração de quantidades fracionárias, das prováveis estratégias de buscar as frações equivalentes ou saber quais conceitos matemáticos estão por de trás do MMC), bem como saber reconhecer e relacionar as diferentes formas de representação e de cálculos (por meios pictóricos ou por algoritmos).

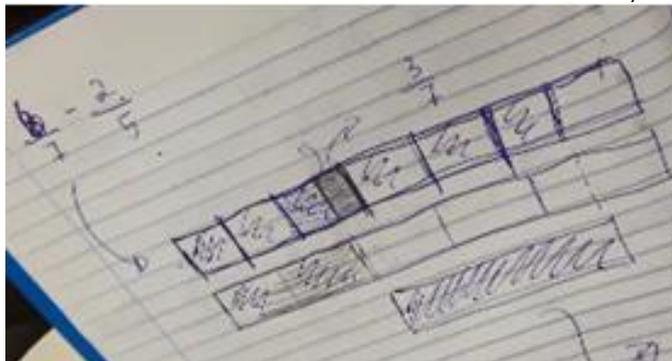
Diante deste contexto apresentado, para a análise buscamos identificar nas filmagens e áudios episódios “críticos” que se configuram em elementos referentes ao conhecimento matemático mobilizado pelo professor de matemática, na direção de tentar compreender qual é esse conhecimento para que, a partir dele, possam surgir reflexões sobre as possíveis contribuições para uma sua melhoria na prática.

### **Evidenciando os elementos do conhecimento matemático especializado do professor de matemática com relação ao cálculo da subtração de frações.**

A fala do professor da qual extraímos o episódio aqui comentado tinha como base as discussões sobre a resposta do cálculo  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$ . Foi pedido para que ele resolvesse tal subtração e depois tentasse explicar suas estratégias de resolução. O professor apresentou a resposta  $\frac{16}{35}$  justificando ter resolvido por meio do algoritmo MMC. Após exibir sua resolução, uma discussão sobre a possibilidade de se resolver essa subtração por outros meios foi levantada. O professor sugeriu representar essas quantidades por meios geométricos, assumindo tais quantidades como parte-todo (Figura 2, a seguir).



Figura 2 : Representação geométrica do cálculo  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$ .



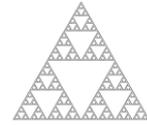
Fonte: Dos autores

A partir do desenho, as discussões direcionaram-se ao tentar atribuir sentido (geométrico e algébrico) quanto a operação de subtração envolvendo duas quantidades fracionárias, além de buscar fundamentação matemática que sustente as relações algébricas (algoritmo do MMC) e geométricas (quantidades como parte-todo). A busca de argumentos matemáticos que relaciona o valor final  $\frac{16}{35}$  da operação  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$  sem utilizar o MMC, provocou a seguinte conclusão do professor Roberto que, embora apresente saber operar algebricamente a subtração e representa-la geometricamente, pontua a sua limitação de validar tal resposta por meio das propriedades e definições matemáticas.

[40:49] Roberto: não, a gente não, a gente verificou, eu não consigo provar para você nem geometricamente, eu não consigo, eu não consigo nem me convencer, eu sei o processo, eu guardei o processo agora, agora entender o processo eu sei que eu vou fazer toda vez [...] mas justificar nem geometricamente e nem algebricamente eu consigo (Transcrição de áudio/vídeo. Arquivo dos autores).

A fala acima realizada por Roberto revela que mesmo ele tendo o conhecimento sobre a regra do MMC para resolver a subtração dada, ele não conseguiu ainda, “provar a tal regra”, nem por meio de desenhos geométricos e nem por meio da álgebra. Reconhecer que houve uma verificação do resultado, mas que ainda falta comprovar “matematicamente” as ideias apresentadas, são elementos do conhecimento matemático especializado de Roberto, relativos aos procedimentos de operar com ou sem a utilização do MMC e das definições/demonstrações/equivalências que sustentam a existência do algoritmo.

Nesse sentido, durante a própria discussão, o professor Roberto reconhece que saber a regra não é suficiente se pretendemos que os alunos entendam o que fazem, referindo também o fato de que ele próprio não entende como poderia fazê-lo sem usar o MMC. A



discussão em torno da representação geométrica levou Roberto a se conscientizar, e verbalizar suas dificuldades em justificar os porquês (algebricamente e geometricamente) – justificação essa que se baseia em um conhecimento que permite que o professor possa possibilitar abordar os diferentes conteúdos e temas sem um foco nas fórmulas – com e para uma efetiva compreensão.

Mobilizar o conhecimento de ter dado significado geométrico as quantidades fracionárias e, por meio dele, desenvolver um planejamento de resolução são elementos de um conhecimento matemático especializado. Dizer que ele ainda não conseguiu se autoconvencer sobre o processo de resolver a subtração por meio da geometria, e que implicitamente, por detrás dela está a concepção do MMC, revela um entendimento da importância de se apropriar das formas de validação e demonstração dos conceitos matemáticos.

## **Conclusões**

É perceptível que discussões no âmbito do *Lesson Study* foram essenciais para uma tomada de consciência sobre a própria prática e as especificidades do conhecimento do professor envolvido e mobilizado ao se deparar com a resolução do cálculo de subtração de duas quantidades quando representadas em fração. Com as discussões se torna evidente a necessidade de uma formação que permita ampliar o conhecimento do professor que ensina matemática tanto sobre frações como sobre diferentes formas de representar as operações envolvendo-as, buscando o entendimento profundo e detalhado de seus procedimentos, propriedades e fundamentações teóricas, a fim de compreender as possíveis formas de validação e demonstração realizados durante o processo de resolução, bem como as conexões estabelecidas entre as frações e o MMC, por exemplo.

O foco de análise aqui foi apenas no *Mathematical Knowledge* (MK), pois assume-se que este sustenta a prática realizada com os alunos – o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), o que permitiu identificar algumas situações matematicamente críticas no conhecimento dos participantes e que se configuram, portanto, como focos necessários de atenção sempre e quando se pretende contribuir para melhorar a prática e as aprendizagens dos alunos.

O conhecimento do professor que ensina matemática sobre os diferentes significados de frações deve ser profundo e detalhado, assim como dominar as operações de adição e



subtração de quantidades representadas pela forma fracionária sem conhecer “a regra” (sem utilização formal do MMC) e deter o entendimento de possíveis registros matematicamente válidos (com e sem números) nos diferentes graus escolares.

### **Agradecimentos**

Este trabalho é parte do projeto "Conhecimento matemático especializado do professor que ensina matemática na educação infantil e nos anos iniciais: um foco em conteúdos de Geometria", processo número 2016/22557-5, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

### **Referências**

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, p. 389–407, 2008.

BAPTISTA, M. *et al.* Lesson study como estratégias de formação de professores a partir da prática profissional. In: ACTAS SIEM XXIII - SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Coimbra. *Anais...* Coimbra: [s.n.], 2012. p. 493–504. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10451/7070>>.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational number concepts. In: R. Lesh., & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and process*, NY: Academic Press, Inc, p. 91-126, 1983.

CARRILLO, J. *et al.* Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: CERME 8, 2013, Ankara. *Anais...* Ankara: Middle East Technical University, 2013. p. 2985–2994.

COELHO, F. G. *A metodologia da Lesson Study na formação de professores: uma experiência com licenciados de matemática*. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

DOIG, B.; GROVES, S. Japanese Lesson Study: Teacher Professional Development through Communities of Inquiry. *Mathematics teacher education and development*, 1. v. 13, p. 77–93, 2011.

FLORES-MEDRANO, E. *et al.* Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Un Marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. [S.l: s.n.], 2014. .

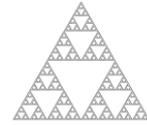
MUÑOZ-CATALÁN, M. C. *et al.* Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, v. 18, n. 3, p. 589–605, 2015.

PINTO, H.; RIBEIRO, C. M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. Da investigação às práticas: estudos de natureza educacional, v. 3, p. 85-105, 2013.

RIBEIRO, C. M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers’ mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. Maj-Tassis & K.



## VI Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática



Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, p. 289-298, 2012.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In: B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ankara, Turkey: PME, v.4, Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis, p.41-48, 2011.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proc of 37th CIGPME – mathematics learning across the life span*. Kiel, Germany: PME, p. 89- 96. 2013.

ROWLAND, T; HUCKSTEP P; THWAITES A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Springer, p. 255–281, 2005.

SÃO PAULO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. 1º edição ed. São Paulo - SP: [s.n.], 2011.

SCHÖN, D. *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Nova York: Basic Books, Inc., Publishers. (1983).