

DESCOBRINDO PADRÕES EM INTEGRAIS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Carla Renata Garcia Xavier da Silva
carla.silva@ifpr.edu.br

Resumo:

Este artigo aborda uma experiência didática vivenciada durante aulas de Cálculo para o curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal do Paraná. O Cálculo muitas vezes é ensinado de forma mecânica e isso ocorre principalmente quando nos referimos ao ensino de integrais, que é o foco deste trabalho. Em geral, são apresentadas apenas técnicas algébricas de integração, o que dificulta a compreensão por parte dos estudantes. Desta forma, a proposta é que, a partir da utilização do software GeoGebra, os alunos observem alguns padrões em integrais de modo que seja possível entender as técnicas de integração e também saber escolher qual a técnica de integração mais adequada em cada situação.

Palavras-chave: Cálculo Integral, Padrões em Integrais, GeoGebra, Formação de Professores

Introdução

Durante o estudo de derivadas, é frequente o contato com gráficos de funções. No entanto, esse contato se perde quando iniciamos o estudo de integrais. Em geral, o conteúdo é introduzido com integrais definidas e sua interpretação geométrica de área e, a partir daí, são apresentadas apenas técnicas algébricas de integração.

Sendo assim, a proposta tem por objetivo apresentar aos estudantes o software GeoGebra, retomar o contato com gráfico de funções, abordar as técnicas algébricas de forma mais lúdica e também mostrar como são elaboradas as Tabelas de Integração.

Para alcançar os objetivos, realizamos o Projeto de Descoberta “Padrões em Integrais” sugerido no livro Cálculo volume 1 de James Stewart. A atividade consiste em investigar gráficos de famílias de funções e as integrais indefinidas dessas famílias usando um Sistema de Computação Algébrica, no nosso caso o GeoGebra. Observando os padrões que ocorrem nas integrais de vários membros da família, o aluno deveria conjecturar e, então demonstrar uma fórmula geral para qualquer membro da família.

Desenvolvimento das Atividades

Para dar início as atividades, utilizamos o Projeto de Descoberta “Padrões em Integrais”, apresentado na figura 1 e o software GeoGebra.



PROJETO DE DESCOBERTA SCA **PADRÕES EM INTEGRAIS**

Neste projeto, um sistema de computação algébrica é usado para investigar as integrais indefinidas de famílias de funções. Observando os padrões que ocorrem nas integrais de vários membros da família, primeiro você vai sugerir e, então, demonstrar uma fórmula geral para qualquer membro da família.

1. (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$ (ii) $\int \frac{1}{(x+1)(x+5)} dx$

(iii) $\int \frac{1}{(x+2)(x-5)} dx$ (iv) $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$$

se $a \neq b$. E se $a = b$?

(c) Verifique sua conjectura pedindo para seu SCA calcular a integral na parte (b). Então demonstre-a usando frações parciais.

Figura 1: Projeto Descoberta "Padrões em Integrais". Fonte: Livro Cálculo Volume 1 James Stewart.

A atividade sugere que os estudantes usem um Sistema de Computação Algébrica para calcular as integrais de alguns membros específicos da família de funções $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$ para que possam observar essas integrais e propor uma fórmula geral para integral de qualquer função da família.

A vantagem do GeoGebra em relação a outros softwares é que para realizar esta atividade não é necessário plotar cada um dos gráficos solicitados no exercício e observar as integrais correspondentes para então conjecturar a fórmula geral. Com o GeoGebra é possível plotar $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$ e fazer os parâmetros a e b variarem de forma a obter cada uma das integrais solicitadas. Além disso, também é possível visualizar o gráfico da função e o gráfico de sua integral.

Outra questão interessante é que, enquanto alteramos os valores de a e b a integral vai se alterando de forma dinâmica, sendo possível perceber como as alterações de a e b influenciam na expressão da integral e também nos gráficos da função e da integral.

Na figura 2, podemos observar a atividade 1 (i). Em verde, é possível ver a expressão de $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ na Janela de Álgebra e seu gráfico na Janela de Visualização. Em vermelho, temos a expressão de $\int \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$ e seu gráfico.

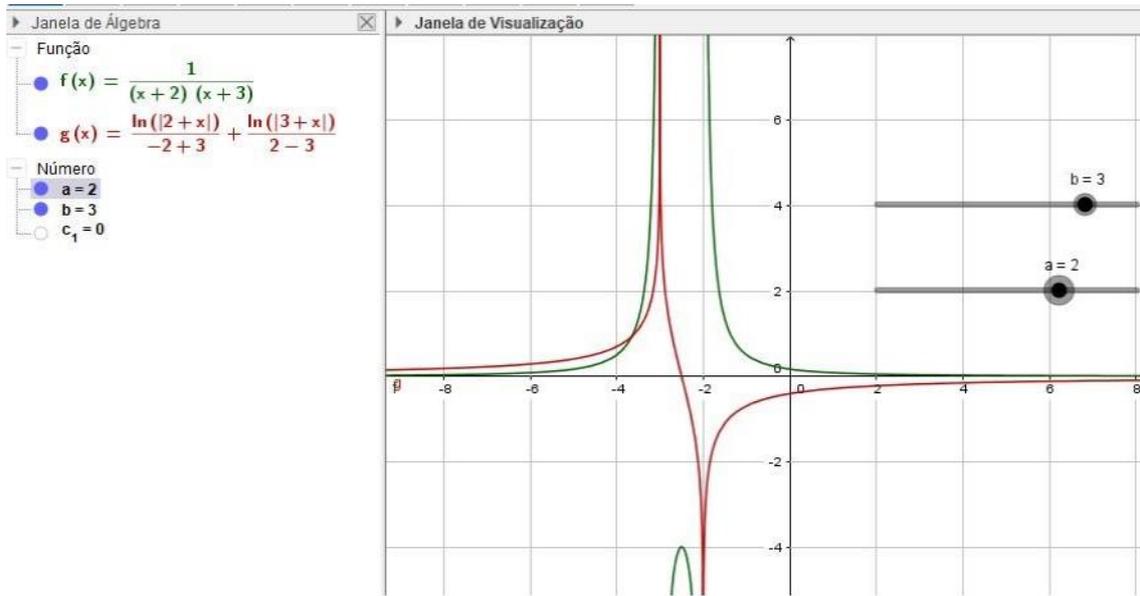


Figura 2: Atividade 1(i). Fonte: autor.

Já na figura 3, podemos observar a atividade 1 (ii) de forma análoga a apresentada na figura 2.

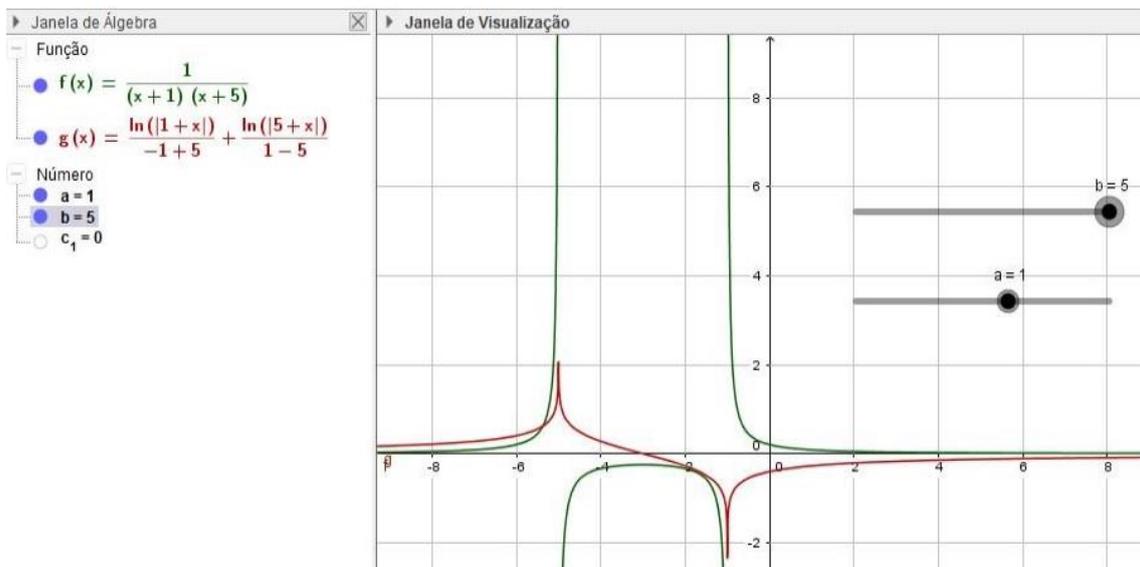


Figura 3: Atividade 1(ii). Fonte: autor.

Pelo que podemos observar até agora, nossa conjectura é de que $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{\ln(|a+x|)}{-a+b} + \frac{\ln(|b+x|)}{a-b}$. E isso pode ser verificado quando fizermos 1 (iii) e também usando a Técnica de Integração por Frações Parciais.

No entanto, a figura 4 mostra a atividade 1 (iv), que apresenta o caso em que $a = b$.

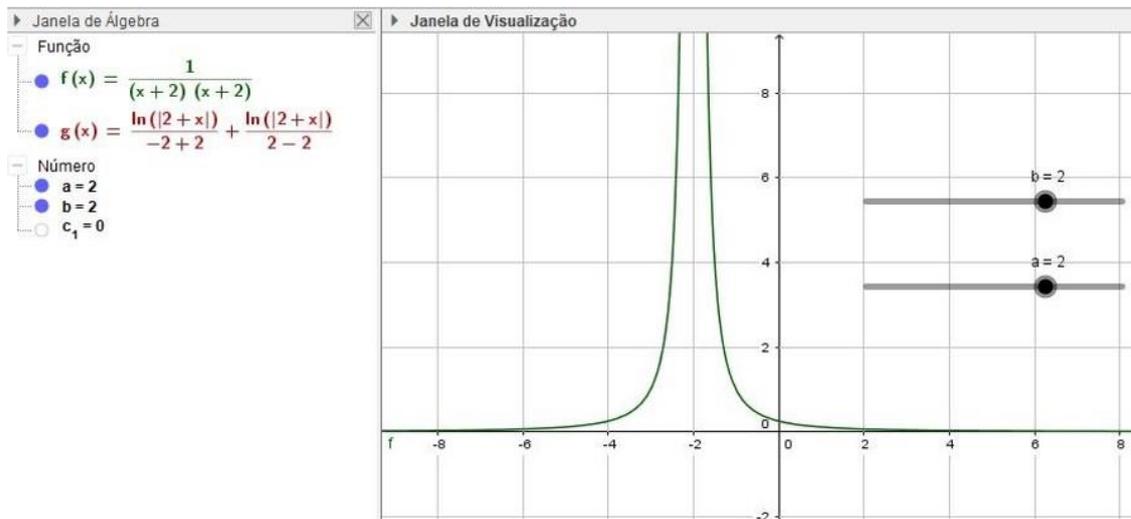


Figura 4: Atividade 1 (iv). Fonte: autor.

Quando $a = b$ a expressão $\frac{\ln(|a+x|)}{-a+b} + \frac{\ln(|b+x|)}{a-b}$ não existe, pois aparece uma divisão por zero. Desta forma, o natural é dizer que se $a = b$ a integral $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$ não existe. E foi o que a maior parte dos estudantes concluiu.

No entanto, sabemos que isso não é verdade, pois essa integral pode ser resolvida por substituição.

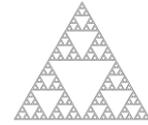
$$\int \frac{1}{(x+2)^2} dx \quad u = x + 2, du = dx \quad \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = -u^{-1} + C$$

Esse problema ocorre, pois, o GeoGebra não analisa separadamente casos particulares. O software escolhe a Técnica de Integração Algébrica mais adequada para a maioria dos membros da família da função e utiliza a mesma regra para todos os membros. Este fato chamou atenção para a importância de se escolher a técnica de integração adequada em cada situação.

Ao longo dessa atividade, os alunos realizaram de forma paralela a observação dos gráficos das funções e analisaram como as alterações dos parâmetros a e b afetam o gráfico da função estudada.

Reflexões e Conclusões

Essa proposta foi bastante estimulante para os estudantes pois proporcionou discussões interessantes.



A partir da atividade os alunos tiveram a oportunidade de conhecer o software GeoGebra, que atualmente é amplamente utilizado no ensino de matemática.

Além disso, também houve uma reaproximação com gráficos de funções e foi possível visualizar como a alteração dos parâmetros a e b modifica o gráfico da função analisada.

Os alunos também entenderam como é elaborada uma Tabela de Integração. Eles puderam perceber que para construir essas tabelas, são estudadas diversas funções de uma mesma família, a fim de observar um padrão para chegar à fórmula geral.

Em geral, a proposta foi produtiva e abordou um conteúdo essencialmente algébrico de maneira lúdica, propiciando que os alunos explorassem os exercícios de forma dinâmica favorecendo a aprendizagem.

Referências

STEWART, J. Cálculo. Volume 1. 6o Edição São Paulo. Cengage, 2010.