RELATOS DE EXPERIÊNCIAS USANDO A METODOLOGIA DE ENSINO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Daniel Tebaldi Santos
danieltebaldi@ifsp.edu.br

Rodrigo Rafael Gomes
rodrafagomes@ifsp.edu.br

Iracema Hiroko Iramina Arashiro
iracema.arashiro@ifsp.edu.br

Resumo:
A pesquisa em metodologia de ensino através de Resolução de Problemas é uma tendência temática em Educação matemática onde o problema irá gerar o processo de aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos. Por esse motivo, essa metodologia foi escolhida como tema de estudo pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática de Bragança Paulista do IFSP (GEEMBRA). Os três relatos apresentados compreendem as experiências dos autores com atividades que desenvolveram com suas respectivas turmas do curso de Licenciatura em Matemática. A primeira experiência foi com um problema cujo objetivo era fazer com que os alunos construíssem estratégias de resolução de sistemas de congruências lineares em Teoria dos Números. A segunda foi com uma tarefa de exploração cujo propósito era encontrar uma definição formal para o conceito de lei de composição interna. E a terceira envolveu a abordagem do tema de permutação caótica em análise combinatória. A proposta era que os alunos resolvessem o problema apresentado pelo professor e eles tiveram a preocupação de chegar à solução certa, mas à medida que cada grupo apresentava sua resolução, eles perceberam que, mesmo que ela não estivesse correta, com o processo de compartilhar a maneira como haviam chegado a ela era possível a construção de um novo conhecimento. Espera-se que os alunos que vivenciaram essa experiência possam replicar junto de seus futuros alunos e também outras que forem conhecendo ao longo do curso.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Educação Matemática, Formação de Professores.

Introdução

Os professores do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), *campus* Bragança Paulista, criaram no ano de 2016 o Grupo de Estudos em Educação Matemática de Bragança Paulista (GEEMBRA), com o objetivo de promover a reflexão e a pesquisa sobre suas próprias práticas pedagógicas. Por ser uma tendência temática de pesquisa em Educação Matemática que dialoga facilmente com outras tendências, a Resolução de Problemas foi o tema de estudo escolhido inicialmente pelo grupo de professores e, portanto, a que tem sido discutida nos encontros. A partir do reconhecimento da existência de três distintas abordagens da

Resolução de Problemas em sala de aula (SCHROEDER; LESTER, 1989 *apud*ONUCHIC,1999), o grupo passou a debater a metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas, na qual "o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44).

Buscando um primeiro entendimento, para além da discussão teórica, dessa metodologia de ensino e almejando dar o primeiro passo rumo à constituição de um projeto coletivo de pesquisa no âmbito do curso, os professores se propuseram a desenvolver individualmente situações didáticas orientadas por essa metodologia em componentes curriculares que lecionam. Três desses relatos são apresentados a seguir e compreendem as experiências dos autores com atividades que desenvolveram com as suas respectivas turmas em 2016, envolvendo conteúdos de teoria dos números, álgebra moderna e análise combinatória. Cada relato foi feito por um autor deste artigo: o primeiro pelo professor Daniel, o segundo pelo professor Rodrigo e o terceiro pela professora Iracema.

Primeiro relato: atividade sobre sistemas de congruências lineares

O presente experimento de ensinofoi desenvolvido com alunos matriculados na disciplina de Teoria dos Números, que está presente no 4º semestre do curso. Algumas especificidades devem ser apresentadas quanto à turma e ao componente curricular escolhido para este experimento: A turma possuía apenas 4 alunos matriculados e que ao longo do curso não tiveram grandes problemas em concluir os componentes curriculares anteriores, todos estavam com os mesmos integralizados de acordo com o projeto pedagógico do curso e o componente curricular escolhido possui características mais tangíveis aos alunos, pois aborda tópicos da teoria dos números que são recorrentes no ensino básico e que de certa forma trazem uma tranquilidade para eles.

O início da experiência de ensino se dá numa etapa anterior ao processo de desenvolvimento da atividade com os alunos em aula, pois é necessário definir o conceito que se deseja construir com eles referente ao plano de ensino do componente. Assim, nessa etapa me preocupei basicamente com o tipo de problema que seria trabalhado com a turma e através deste foi definido qual seria o conceito a ser construído.

Fazendo uma busca por problemas que pudessem ajudar para o desenvolvimento da atividade, encontrei um que me interessou em Milies e Coelho (2006), que faz parte da bibliografia básica do componente curricular, referente ao conceito de resolução de sistemas de congruências lineares. O problema foi ajustado para atender os objetivos referentes à atividade, pois da forma que estava enunciado, seria necessário fazer a discussão de situações de resolução que não faziam parte das intenções da atividade, demandando um tempo maior para a mesma, tornando-a inviável para duas aulas de 50 minutos. Modificado, o problema foi apresentado da seguinte forma para a turma:

Se de uma cesta com ovos retirarmos duas unidades por vez, sobra um ovo. O mesmo acontece se os ovos são retirados 3 a 3 ou 5 a 5. Mas não resta nenhum ovo se retirarmos 7 unidades por vez. (1) Encontre uma quantidade possível de ovos para que isso aconteça; (2) Encontre a menor quantidade possível de ovos para que isso aconteça; (3) Construa uma solução geral para uma quantidade possível de ovos.

A finalidade do problema proposto era fazer com que os alunos construíssem estratégias de resolução que contribuam para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de resolução de sistemas de congruências lineares, que seria apresentado posteriormente à turma.

Ao iniciar a atividade com a turma, primeiro expliquei que se tratava de um experimento de ensino baseado nas discussões sobre a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, que vinham sendo promovidas no GEEMBRA. Falei muito rapidamente no que se baseava a metodologia e também pedi permissão para que a atividade fosse filmada, procedimento metodológico bastante importante em pesquisas qualitativas em Educação Matemática (BORBA, 2004), além disso, pedi que assinassem uma autorização para essa filmagem, somente para fins pedagógicos.

Comecei sugerindo que permanecessem como estavam, em duplas, apresentei o problema para eles, orientei-os para que lessem individualmente e depois conjuntamente para que não ficasse nenhuma dúvida sobre o enunciado do problema. Logo em seguida perguntei se havia alguma dúvida sobre o enunciado e um dos alunos expôs a forma que havia entendido, descrevendo o problema com outras palavras, e assim eles começaram o trabalho de resolução do problema.

Procurei promover as orientações de modo que não influenciassem diretamente o processo de resolução do problema pelos alunos. Para o professor, que muitas vezes é tentado a intervir em situações como essa, é algo difícil de fazer, mas necessário para se evitar que o aluno estabeleça consigo uma relação de dependência e termine não conseguindo desenvolver suas próprias estratégias de resolução.

Na sequência, os alunos foram para o quadro e fizeram a exposição de suas estratégias de solução do problema e em seguida os pares se questionaram com relação a essas estratégias. Acredito que esse momento seja o mais rico da atividade, é nele que conseguimos observar através das explicações dos alunos, o que realmente eles estavam pensando e sobre o que eles escreveram, que muitas vezes não reflete a totalidade de suas estratégias de resolução. O que confirma essa ideia é a exposição de um dos alunos sobre a maneira que ele encontrou para explicar a resposta do segundo item do problema, elaborando uma argumentação muito consistente e que não estava nas suas anotações que foram registradas no quadro. Esta observação só foi possível através da revisitação do vídeo, que se mostrou uma ferramenta importante para essa possibilidade de análise. Para finalizar a atividade, foramapresentadas à turma as etapas de desenvolvimento do experimento de ensino, estas que foram seguidas de acordo com o que propõem Allevato e Onuchic (2014). Também para o fechamento estava previsto a formalização do conceito matemático seguido de sugestões de outros exercícios, que foi concluída na aula seguinte e demandou mais uns 20 minutos.

Segundo relato: atividade sobre o conceito de lei de composição interna

A atividade aqui descrita foi desenvolvida com uma turma do quinto semestre, constituída por cinco alunos. A opção pela metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas surgiu como uma possibilidade de inversão da ordem usual de apresentação dos conceitos em sala de aula (definições → exemplos → exercícios).

Em face da dificuldade para se encontrar um problema gerador que julgasse adequado, decidi realizar uma tarefa de exploração, instrumento que, segundo Ponte (2005), tem uma estrutura mais aberta e um grau de dificuldade menor do que um problema. O propósito da tarefa era, ao final, estabelecer uma definição formal para o conceito de lei de composição interna, o que, no presente contexto, entendia-sepor uma explicação desse conceito em termos de noções já conhecidas pelos estudantes. A ideia era que percebessem que tal conceitoconstitui um caso particular danoção de função eque fossem capazes, por conseguinte, de explica-lo a partir dessa noção. Para tanto, o caminho escolhido foi apresentar aos estudantes uma definição informal para lei de composição interna e algumas questões cujo processo de resolução – assim esperava-se – os conduzisse àquela percepção. A formulação escolhida foi inspirada em Dieudonné (1990): uma *operação definida sobre um conjunto de objetos* ou uma *lei de composição interna* é um processo que faz corresponder a dois objetos de uma mesma espécie um terceiro objeto*bem determinado* da mesma espécie que os dois primeiros; dizemos que o terceiro objeto é o *resultado da operação* quando aplicada aos dois primeiros. Com essa definição em vista, os estudantes deveriam responder às questões seguintes:

1. Verifique se os processos abaixo são 'leis de composição interna' e identifique, nos casos afirmativos, 'sobre qual conjunto de objetos as leis' estão definidas: (A) a adição de números naturais; (B) a multiplicação de números reais; (C) a subtração de números naturais; (D) a divisão de números inteiros; (E) a adição de vetores no plano cartesiano; (F) a subtração de inteiros pares; (G) a potenciação de números naturais; (H) a composição de funções de Z em Q; (I) a composição de funções de Q em Q; (J) a adição de matrizes 3x4; (K) a multiplicação de matrizes 3x4 ou 4x3; (L) a multiplicação de raízes quintas complexas de 2.

2. Se você pudesse redefinir o conjunto de objetos para transformar cada um dos processos anteriores que não são leis de composição internas em tais leis, como você faria?

3. A adição de números racionais é um 'processo' e o resultado do processo, que também é um número racional, é um 'objeto', denominado 'soma' dos dois números. Como você indicaria por meio de uma notação, nesse caso, o processo (adição) e o resultado do processo (soma), de modo que se possa claramente distingui-los? Faça o mesmo em relação à multiplicação e à subtração de números racionais.

*4. Se * indica uma operação sobre um conjunto* $E \neq \emptyset$ *e a e b são elementos de E, como podemos indicar o resultado da operação * aplicada, nessa ordem, nesses dois objetos?*

5. Você percebe alguma conexão entre o conceito de 'lei de composição interna' e o de 'função'? Qual?

Programei a realização da atividade para quatro aulas. Antes de lhes apresentar a tarefa, pedi aos estudantes que formassem dois grupos (um com dois indivíduos e outro com três) e depois expliquei, baseando-me em Allevato e Onuchic (2014) e em Polya (1995), que, na busca pela solução, realizaríamos o trabalho em etapas.Entreguei uma folha para cada aluno com a definição e as questões acima, e combinamos que a plenária iria ocorrer quando tivessem respondido à primeira questão, deixando a resolução e a plenária das demais para depois.

Fui consultado algumas vezes pelos grupos ao longo do desenvolvimento da atividade, mas tentei não direcionar o pensamento dos estudantes. Ambos os grupos apresentaram dificuldades com a questão L e um deles, com as questões J e K, e, para que as respondessem,consultaram livros sobre esses assuntos. Como não conseguiram terminar a atividade ao final das duas aulas, a plenária ocorreu outro dia, ainda na mesma semana.

As respostas apresentadas revelaram a compreensão pelos estudantes da definição informal, mas também outras dificuldades além daquelas percebidas durante o processo de resolução. Ambos os grupos responderam corretamente as questões A, B, C, D, e F, apresentando justificativas similares para suas respostas, e afirmativamente a questão G, se esquecendo do caso particular 0^0. Os dois grupos responderam negativamente a questão H, embora apenas um deles tenha justificado a resposta. A explicação fornecida por este grupo foi que os conjuntos Z e Qnão são da mesma espécie, isto é, o grupo entendeu que, dados os dois objetos com que se operava, um era elemento de Z e o outro, de Q, não reconhecendo, portanto, que os objetos envolvidos eram, na verdade, funções – em particular, funções que “levam” os elementos de um conjunto em elementos do outro.

A resolução das demais questões e a sua discussão ocorreu num terceiro dia, na semana seguinte. As respostas revelaram aspectos interessantes do conhecimento dos alunos. Em relação à operação da questão C, por exemplo, ambos os grupos sugeriram que o minuendo deveria ser maior do que o subtraendo, a fim de que o resultado da operação fosse um número natural. Minha expectativa era que os estudantes fossem ampliar o conjunto de objetos, redefinindo a lei de composição interna sobre os inteiros, mas o que fizeram foi o oposto. Vista como uma relação binária, a operação da questão C relaciona elementos de N×N(nem todos) aos de N; por isso, ao estabelecerem uma condição entre o minuendo e o subtraendo, os estudantes acabaram definindo, sem saber, uma função que a cada elemento do conjunto $\{(x, y) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} | x \geq y\}$ associa o número natural $x - y$. Evidente que esta função, a rigor, não é uma lei de composição interna sobre N, visto que nem todo elemento de N×Ntem um correspondente, por ela, em N, mas essa exigência não está posta na definição informal que lhes apresentei. Esse foi um ponto difícil de discutir com eles, pois a ideia de que uma operação possa ser identificada com uma função não lhes pareceu óbvia. Com efeito, a principal dificuldade quando discutimos, ao final, a questão 5, foi conceber o domínio da função como um conjunto de pares ordenados.

Outra ideia de difícil aceitação, conforme revelado pelas respostas às questões 3 e 4, é o emprego da expressão "$a * b$" para designar não o processo, mas o resultado da operação * sobre a e b. Os estudantes não concebiam uma expressão complexa envolvendo dois elementos como o sinal de um único elemento do conjunto E.

Terceiro relato: atividade sobre permutação caótica

O experimento de ensino a seguir foi realizado na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar III do terceiro semestre do curso, que aborda análise combinatória em seu conteúdo.Participaram da atividade nove alunos que foram divididos em três grupos de mesmo tamanho, sendo que todos estavam cursando a disciplina pela primeira vez. Da mesma forma que nos relatos anteriores, foi apresentada a metodologia e os alunos concordaram em participar. O tema escolhido foi apermutação caótica, que utiliza o princípio da inclusão-exclusão como forma de contagem que tinha sido dado na aula anterior.

O problema foi inspirado em um texto no *blog* de Ricardo Marinoonde são apresentadas variações de mesmo problema. O problema foi adaptado eele está apresentado a seguir:

Muitos já participaram da brincadeira do Amigo Secreto no final do ano. Como ela funciona: É realizado um sorteio com os nomes dos n participantes. Cada participante sorteia um nome que corresponde àquela pessoa a quem deve dar um presente no dia combinado pelo grupo, desta forma todos dão e recebem presentes. Como o objetivo é a troca de presentes, não vale a pessoa sortear o seu próprio nome. Por esse motivo, muitas vezes acaba sendo necessário um novo sorteio de forma que a brincadeira seja válida.

a. Suponha que quatro pessoas irão participar de um amigo secreto. De quantas formas o sorteio será válido?

b. E se fossem cinco participantes?

c. Elabore uma estratégia de contagem.

Várias estratégias surgiram durante esse período de leitura e discussão do problema.

O primeiro grupo nomeou as pessoas genericamente como A, B, C e D. Fez a contagem total das permutações (24) e desse total excluiu onze casos que, pela sua contagem, não poderiam ocorrer, ou seja, casos em que a pessoa sorteia a si mesmo. Para excluí-los enumerou-os da seguinte forma: desenhou quatro linhas tracejadas e na parte debaixo colocou a pessoa que faria o sorteio e na de cima colocou apessoa sorteada.

ISSN 2318-7948

Na contagem realizada por esse grupo, os casos excluídos foram onze: ABCD, ABDC, ADCB, ACDB, DBCA, CBAD, DACB, ADBC, CBDA, BDCA e BCAD. O grupo chegou então, à conclusão de que existem treze maneiras de se fazer um sorteio de amigo secreto com sucesso.

O segundo grupo usou a estratégia de usar o diagrama de árvore. O grupo partiu de uma pessoa A que poderia sortear B, C ou D e no passo seguinte colocou quem a segunda pessoa poderia sortear. Por exemplo, a pessoa B poderia sortear C, D ou A. E se ela sorteou a C, esta poderia sortear a D ou a A, e finalmente a pessoa D sortearia a A, fechando o ciclo. Segundo a estratégia desse grupo, havia 15 possibilidades de se fazer o sorteio do amigo secreto com sucesso. O grupo não percebeu que colocar na árvore a sequência ABDA é o mesmo que o C sortear a si mesmo e que, portanto, não deve ser contado. E no caso ABA, o aluno precisava ter contado que BCDB e BDCB seriam dois casos a serem acrescentados nesse “ramo”.

O terceiro grupo usou a contagem direta. Usando as mesmas formas de apresentação que o primeiro grupo, colocando na parte de baixo das linhas tracejadas a pessoa que iria sortear,nomeando-os por S_1, S_2, S_3 e S_4 e na parte de cima a pessoa sorteada, chegando à conclusão de que são sete as possibilidades de se fazer um sorteio de amigo secreto com sucesso.

Essa metodologia despertou curiosidade nos alunos, pois cada vez que um grupo apresentava sua solução, os demais prestavam atenção na resolução e percebiam as falhas cometidas tanto pelo seu próprio grupo como o daquele que estava sendo apresentado, sendo capazes de corrigi-los. Dessa forma, prontamente um aluno colocou na lousa uma solução mais organizada que foi elaborada conjuntamente com os colegas da turma de maneira mais organizada e assim chegando à contagem correta de 9 sorteios possíveis para realizar o amigo secreto.

Ao usar essa metodologia, o professor deve estar preparado para lidar com respostas muito distintas daquela que ele espera, pois as soluções podem vir de maneira inesperada que requer direcionamentos adequados para se chegar à solução do problema e explorar outros conhecimentos. Uma dificuldade encontrada foi a de conciliar o tempo que os alunos precisam para apresentar uma solução e o tempo previsto de aula, mas ainda assim, os alunos avaliaram positivamente a metodologia, pois puderam participar mais ativamente da aula

Considerações finais

Promover práticas de ensino diferentes das consideradas tradicionaispode desencadear uma série de reflexões tanto no professor formador de professores quanto no futuro professor, considerando que muito do que desenvolvemos nas nossas práticas de ensino são reflexos de nosso processo de formação. Nesse sentido, entendemosque essas iniciativas contribuem muito para uma tendênciacom relação ao novo papel do professor que é a de professor-pesquisador. Os relatos apresentados nos fazem refletir sobre algumas situações que em princípio podem promover algumas dificuldades para uma abordagem através da resolução de problemas. A primeira é a de se encontrar um problema adequado para abordar o conteúdo previsto nos planos de ensino dos componentes curriculares. A segunda é em relação à adequação do tempo para o processo de resolução do problema. Otempo que os alunos levaram para chegar a uma solução foi muito maior que o que havíamos reservado no planejamento da aula, e isso nos levou a reorganizar os próximos conteúdos programados no plano de ensino. A terceira é que o número reduzido de alunos dificultou para que o momento da plenária fosse mais rico de perguntas e de levantamento de hipóteses.

O que nos incentiva a promover práticascom essa metodologia é que na etapa da plenária conseguimos identificar de fato se os alunos compreenderam conceitos que já foram trabalhados ao longo do componente curricular, que se materializa à medida que os alunos precisam construir argumentos baseados em conceitos anteriores para justificar as suas estratégias para resolução do problema. A preocupação dos alunos em apresentar uma solução certa no tempo estabelecido acaba se tornando secundário, pois essa metodologia de ensino prevê a possibilidade de explorar o erro,ação que também é uma forma de aprendizagem e onde o que realmente importa é que o processo de resolução de problema gera a aprendizagem. Álvarez Méndez (2002) afirma que os erros devem ser apontados nas correções das avaliações e se deve fazer deles um meio de aprendizagem

Considerando que essa atividade não é competitiva e sim colaborativa, à medida que cada grupo apresenta uma solução e a compartilha com todos, se constrói um novo conhecimento. A experiência nos incentivou a começar a explorar novas possibilidades de ensino-aprendizagem nas aulas de alguns componentes curriculares do curso e nos fez perceber como a investigação sobre a própria prática pode ser conduzida e que, se realizada de modo contínuo e coerente, podem vir a ter algum efeito na prática de nossos alunos, os futuros professores.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. de la R. et al (Orgs.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ÁLVAREZ MÉNDEZ, J. M. **Avaliar para conhecer. Examinar para excluir**. Trad. Magda Schwartzhaupt Chaves. Porto Alegre: Artmed, 2002. (Inovação Pedagógica)

BORBA, M. C. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**.**In.: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, n. 27, 2004, Caxambu. **Anais da 27ª reunião anual da Anped**, Caxambu: ANPED, 2004.

MARINO, R. **Todas as configurações possíveis**.[blognainternet], [s.l.], 28 dez. 2012Disponívelem: <https://ricardoamarino.wordpress.com/2012/12/28/amigo-secreto>. Acesso em:15 ago. 2016.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da matemática contemporânea**. Trad. J. H. vonHafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990. (Ciência Nova, 8)

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática**. São Paulo, Edusp, 2006.

ONUCHIC, L. de laR.Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.