O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: REFLEXÕES E DISCUSSÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Elion Souza da Silva
profelion@gmail.com

Fabiana Chagas de Andrade
bia.profmat@gmail.com

Jefferson Araújo dos Santos
jeffaraujo30@yahoo.com.br

Resumo:
O presente texto descreve uma proposta de atividade formativa sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino de Combinatória, realizada com alunos de um programa de pós-graduação da UFRJ. À luz das noções de Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL, THAMES & PHELPS, 2008) e de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (SHULMAN, 1986), buscamos inspiração no percurso metodológico apresentado por Biza et al. (2007), que consiste na apresentação de cenários de investigação contendo resoluções fictícias de alunos para observar a postura do professor ante as mesmas. Em nossa adaptação, desenvolvemos a atividade a partir de um problema motivador de combinatória - O Problema dos Diferentes Caminhos - para que os participantes pudessem refletir sobre estratégias para resolvê-lo junto a seus alunos, e, em seguida, projetamos algumas resoluções prévias de professores do Ensino Médio para esse problema, que foram coletadas por um dos pesquisadores através de uma lista de transmissão em um aplicativo de mensagens instantâneas. Essas resoluções foram discutidas, buscando a reflexão segundo os aspectos didáticos e metodológicos. Por fim, lançamos duas questões disparadoras baseadas no ensino desse conteúdo para fomentar a discussão. A atividade mostrou-se ricamente produtiva, de modo que os participantes puderam coletivamente (re)construir alguns aspectos de seu conhecimento matemático para o ensino de combinatória, contribuindo para seu desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático Para o Ensino; Conhecimento Pedagógico do Conteúdo; Formação de Professores; Ensino de Combinatória.

INTRODUÇÃO

Refletir sobre a própria prática de ensino é um exercício importante na busca do professor por uma melhor atuação em sala de aula em prol da aprendizagem de seus alunos, posto que refletir, segundo Geraldi, Messias e Guerra (1998), implica uma consideração cuidadosa e ativa daquilo em que se acredita ou se pratica, à luz dos motivos que o justificam e das consequências que daí resultam. Considerando essa premissa, nosso texto apresenta a descrição e análise de uma atividade formativa elaborada para um grupo de mestrandos e doutorandos de uma disciplina do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT-UFRJ), realizada no 2º semestre de 2016. O objetivo da atividade foi fomentar as discussões do tópico por nós eleito (Combinatória), mobilizando e, potencialmente, ressignificando seus Conhecimentos Matemático para o Ensino (MKT) (BALL, THAMES & PHELPS, 2008) em seus vários aspectos, na perene intencionalidade de buscar enxergar a matemática elementar a partir de um ponto de vista superior, no sentido de Klein (2010). Nosso objetivo fulcral é contribuir para o desenvolvimento profissional de cada participante.

Em linhas gerais, apresentamos um problema de Análise Combinatória (*"O Problema dos Diferentes Caminhos"*), acompanhado de duas questões disparadoras para a discussão acerca de aspectos conceituais e didáticos que permeiam o arcabouço de saberes de cada professor. Ainda incorporamos nos elementos para a discussão algumas resoluções prévias coletadas por um dos autores através de uma *Lista de Transmissão*[1] em um aplicativo de mensagens instantâneas, que foram analisadas segundo os aspectos supracitados. Nossa inspiração, apesar das muitas particularidades, foi em Biza, Nardi & Zachariades (2007), na mesma perspectiva de explorar simulações de situações que possam surgir no dia-a-dia da prática do professor na sala de aula.

> Em geral, consideramos essas tarefas como oferecendo oportunidades para preparar os professores para entrarem na sala de aula com uma habilidade aprimorada para a prática reflexiva (...). Essas oportunidades podem ser na forma de oficinas nas quais os professores se envolvem e refletem/discutem suas respostas e as de outros para essas tarefas; (...) vemos esse tipo de tarefa como parte de um ambiente preparatório que levanta e desenvolve a consciência do professor (...). (BIZA et al.; 2007, p. 309, tradução nossa).

O conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento matemático para o ensino

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, introduzido por Shulman (1986), é um marco no estudo e pesquisa sobre os saberes docentes, especialmente chamando a atenção

[1] Em uma lista de transmissão, os participantes recebem a mensagem e o emissor recebe cada resposta individualmente, ou seja, os participantes não leem as respostas uns dos outros e não sabem quem são e nem quantas são as pessoas que receberam a mesma mensagem.

para a ausência à época do olhar para o Conhecimento do Conteúdo, ao que ele denuncia como sendo o *Problema do Paradigma Perdido*. Nesse artigo, o autor afirma que o professor deve *compreender* as estruturas do conhecimento do conteúdo que leciona, tanto no aspecto disciplinar, quanto dentro do contexto pedagógico e acerca do currículo, caracterizando, assim, as três categorias para o saber docente: (1) Conhecimento (Disciplinar) do Conteúdo; (2) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e (3) Conhecimento Curricular.

Na década de 80, Shulman (1986) e seus colaboradores iniciaram sondagens das complexidades da compreensão do conteúdo e do processo de ensino do docente, concluindo a emergente necessidade de um quadro teórico mais coerente.

> Como podemos pensar acerca do conhecimento que cresce na mente do professor com ênfase especial no conteúdo? Eu sugiro dividirmos entre três categorias do conhecimento de conteúdo: (a) Conhecimento Disciplinar do Conteúdo, (b) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e (c) Conhecimento Curricular. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

Conhecimento Disciplinar do Conteúdo se refere ao montante e organização do saber em si na mente do professor (p. 9). Requer compreender as estruturas sintáticas e materiais do conteúdo, sendo capaz de dizer não somente que *algo é assim*, mas também *porque é assim*.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, por sua vez, não é apenas o conhecimento do conteúdo em si, na dimensão do conhecimento da matéria no ensino. Sendo assim, Shulman está se referindo ao tipo de conhecimento de conteúdo que dialoga e se mistura com o espectro pedagógico. Esse conhecimento tem muito a ver com as ilustrações, exemplificações, analogias, (re)formulações dos conceitos, ou seja, os caminhos para tornar o conteúdo mais tangível e compreensível ao aluno. (p. 9).

O *Conhecimento Curricular* constitui uma categoria que representa todos os programas concebidos para ensino de certos tópicos em dado nível, a variedade de material didático disponível etc. Assim como um médico preparado sabe exatamente qual medicamento prescrever para combater um determinado mal, o professor precisa saber qual o momento certo, para usar determinada ferramenta. (p. 10).

Shulman (1986) discorda da ideia popular de que ser professor é uma alternativa a um profissional fracassado. "Quem sabe faz, quem não sabe, ensina". Corroboramos com essa ideia à medida que entendemos o magistério como profissão e não ofício, e que a formação inicial do professor muitas vezes não valoriza o conhecimento pedagógico do conteúdo, centrando-se apenas na fórmula 3 + 1 (3 anos de Matemática pura mais 1 ano de Pedagogia).

> Com Aristóteles nós afirmamos que o derradeiro teste de compreensão reside na habilidade de transformar conhecimento em ensino. Quem sabe, faz. Quem compreende, ensina. (SHULMAN, 1986, p. 14, tradução nossa).

Assim, nossa atividade formativa teve a perspectiva do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, que foi refinado por Ball, Thames e Phelps (2008) que, por sua vez, desenvolveram uma teoria baseada em Shulman (1986) na Matemática. A proposta do trabalho de Ball e seus colaboradores foi investigar a natureza da orientação profissional para o conhecimento de matemática para estudos em ensino de matemática, e identificar o *Conhecimento Matemático para o Ensino*. Dessa forma, Conhecimento de Matemática para o Ensino é o conhecimento matemático necessário para executar o trabalho da sala de aula (p. 395).

> Por "ensino", queremos dizer tudo que os professores devem fazer para apoiar a aprendizagem de seus alunos. Claramente, significa que o trabalho interativo de lições de ensino nas salas de aula e todas as tarefas que surgem no decurso do mesmo trabalho. (BALL; THAMES; PHELPS, p. 395, tradução nossa).

Ball e seus colaboradores discerniram empiricamente seis subdomínios dentro das categorias de Shulman: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), Conhecimento de Horizonte (HCK), Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS), Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC). Nesta perspectiva, os três primeiros estariam contidos no Conhecimento (Disciplinar) do Conteúdo e os três últimos no Saber Pedagógico do Conteúdo (Fig. 1).

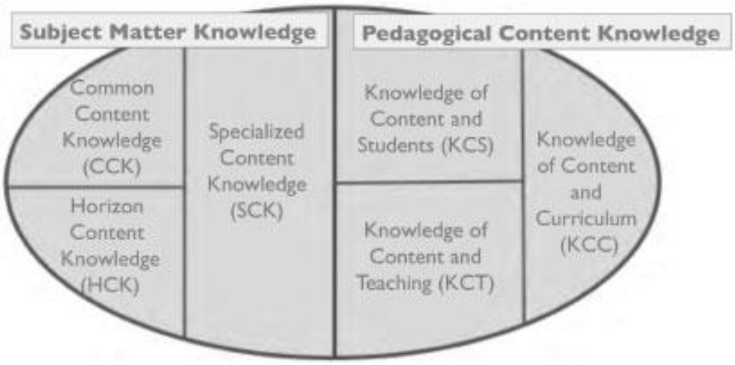


Figura 1: Conhecimento Matemático para o Ensino e seus subdomínios.
Fonte: Adaptação de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403)

O Conhecimento Comum de Conteúdo (CCK) seria aquele que tanto os professores de matemática quanto os não professores devem conhecer ao acertar uma questão, enquanto o Conhecimento Especializado (SCK) é *único* para o ensino (p. 399, 400). Ele foi a principal contribuição de Ball et al (2008), e perpassa tarefas específicas do professor que ensina matemática, envolvendo uma descompactação do que é necessário para o ensino, como escolher um exemplo que melhor representa determinado conceito, escolher o melhor registro semiótico para ensinar um objeto, questionar os alunos com a finalidade de chegar a uma conclusão sobre um problema, etc.

O Conhecimento de Horizonte consiste em estabelecer conexões entre conteúdos em diferentes séries. Vale ressaltar que os autores Fernandez e Figueiras (2014) refinaram o HCK, entendendo que ele não tem uma posição na estrutura proposta por Ball, mas permeia e atua sobre o KCT, KCS e SCK, chamados conhecimentos em ação, moldando-os durante a prática docente. Além disso, ele divide-se em conexões entre diferentes séries (temporal), diferentes representações de um mesmo conceito (intraconceitual) e entre conceitos diferentes (interconceitual).

O Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS) é a interseção entre o conhecimento da matemática e também os conhecimentos acerca do aluno, permitindo ao professor antecipar ideias prováveis dos alunos, corrigindo, intervindo e dando-lhes autonomia. O Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) aborda a relação entre a matemática e ensino, diferenciando tarefas/problemas introdutórios de tarefas/problemas avançados, mensurando qual atividade é mais fácil ou mais difícil em termos gerais etc.

Por fim, o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (CCK) versa sobre diversidade de materiais didáticos disponíveis e de programas existentes e implica em conhecer um conjunto de características que facilita ou dificulta a aprendizagem nas suas opções didáticas.

Klein (2010) defendia que professores de matemática deveriam olhar para a Matemática Escolar "de cima". Mesmo sendo de uma época muito anterior a Shulman, Klein mostra ter impressões semelhantes sobre o saber necessário para o ensino, como enfatizam Rangel, Giraldo e Maculan (2014):

> (...) Klein entende que o professor deve não somente ter conhecimentos específicos sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática como ciência. (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014, p. 2).

O ensino de combinatória

Em relação ao tema da atividade formativa, optamos por explorar a Combinatória, um ramo importante da matemática escolar, que representa um caso especial principalmente por não possuir uma teoria axiomática. Tal campo interage com outras teorias matemáticas, levando a estratégias de resolução de problemas e fornecendo resultados, além de lidar com problemas contextualizados. A resolução de problemas pode estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório, imprescindível para que o aluno não acabe tomando para si a Combinatória como simplesmente *o estudo dos arranjos, combinações e permutações*. Segundo Polya (apud DANTE 2003), a resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da aprendizagem matemática desde o papiro "Rhind". Assim, corroboramos que o uso de problemas é particularmente útil quando se aprende e ensina matemática.

Klein (2010) argumenta que o professor precisa saber *mais* do que o que vai ensinar aos seus alunos. Mas, nos dias de hoje, em que se constituiria este *a mais* que o professor de matemática precisa saber acerca de combinatória em relação àquilo que exporá para (e explorará com) os seus alunos? Neste caminho, podemos pensar em subtópicos específicos que não figuram nos currículos do ensino médio regular como: o Princípio das Casas dos Pombos, Princípio de Inclusão e Exclusão, Funções Geradoras etc., mas, principalmente, podemos pensar sobre aspectos didáticos e metodológicos, tais como: Como enunciar o Princípio Multiplicativo para os alunos? Em que momento podemos introduzir fórmulas que resolvem determinados tipos de problemas (como Combinações)? Que contextos e situações podem ser explorados mais a fundo nos problemas propostos aos alunos? Refletir sobre questões como estas é um trabalho extremamente complexo e sutil, mobiliza saberes múltiplos do professor e serão o foco do nosso trabalho.

Aspectos metodológicos e discussão dos resultados

Na atividade formativa tomamos como inspiração a base metodológica de Biza, Nardi & Zachariades (2007), que utilizaram cenários de investigação em uma seleção de alunos de mestrado com vistas a avaliar o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (SHULMAN, 1986). Na seleção, os autores apresentaram uma questão sobre inequação modular com resoluções fictícias de alunos, as quais deveriam ser corrigidas e comentadas pelos candidatos. O motivo principal da escolha dessa base em nosso trabalho foi propiciar um ambiente de reflexão sobre saberes docentes e sobre a própria prática que simulasse situações reais vividas pelos professores em sala de aula. Acreditamos que esse tipo de discussão possibilita que os sujeitos da atividade formativa, que denominamos alunos/professores, aprendam e reconstruam ideias pré-estabelecidas sobre determinado conteúdo da Matemática.

Nesta adaptação, conduzimos uma atividade formativa que tinha como problema motivador de Análise Combinatória o problema dos diferentes caminhos, para uma turma de alunos do Programa de pós-graduação em Ensino e História de Matemática e da Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, da qual fazíamos parte. Inicialmente, foram formadas quatro duplas que teriam 10 minutos para resolver o problema exposto:

O problema dos diferentes caminhos
Uma cidade tem forma retangular, e sua malha de ruas é composta por $x + 1$ linhas paralelas sentido norte-sul e $y + 1$ linhas paralelas para o leste-oeste. De quantas maneiras um carro pode chegar ao canto nordeste (B) se ele começa o trajeto no canto sudoeste (A) e viaja apenas nas direções leste e norte?

Fonte: Andreescu & Feng (2013), tradução nossa

O mesmo problema (no caso particular onde $x = 6$ e $y = 4$), para uma lista de transmissão com 26 professores do Ensino Médio, em um aplicativo de mensagens instantâneas de celular. Destes, 13 responderam à solicitação e, de acordo com a riqueza e especificidade das respostas, selecionamos quatro delas para exibir e discutir junto às duplas. O comando enviado previamente aos professores da lista de transmissão foi o seguinte:

"Uma cidade tem forma retangular, e sua malha de ruas é composta por 7 linhas paralelas sentido norte-sul e 5 linhas paralelas para o Leste-Oeste, conforme ilustra a figura 1 abaixo. De quantas maneiras um carro pode chegar ao canto nordeste (B) se ele começa o trajeto no canto sudoeste (A) e viaja apenas nas direções leste e norte?

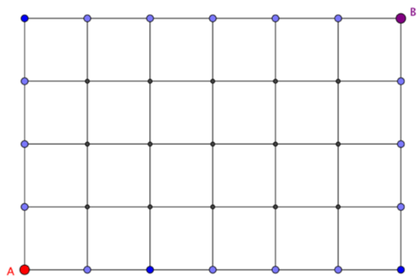


Figura 2: Malha quadriculada do problema dos diferentes caminhos
Fonte: Autores

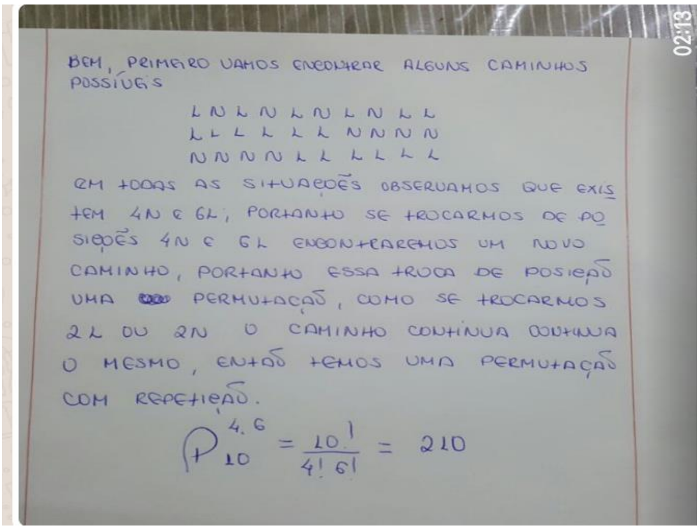
Suponha que você tenha encaminhado este problema como uma tarefa para alunos de uma turma de ensino médio na qual você lecione. Após dar o visto nas soluções de cada aluno, você decide expor uma solução possível no quadro. Responda esta mensagem nos mostrando qual seria essa solução para o problema, descrevendo de que modo você explicaria cada passo para os seus alunos.

Se um de seus alunos tivesse resolvido (obtendo a resposta correta) associando o problema a uma combinação simples e aplicando a fórmula da mesma, qual seria seu retorno a esse aluno? Você acharia importante mostrar que combinações simples e permutações com repetições (no caso de dois objetos repetidos) são equivalentes (matematicamente)? "

As duplas da atividade tiveram 10 minutos para refletir sobre o problema, e somente após esse tempo, projetamos as soluções dos 4 professores selecionados no quadro para serem discutidas com todo o grupo. Para análise dos dados, nomeamos as duplas como D1, D2, D3 e D4.

Em seguida, tivemos cerca de quinze minutos junto à turma para discutir as respostas dadas pelos professores do Ensino Médio, refletindo acerca do Conhecimento Matemático para o Ensino de Análise Combinatória. Utilizamos as siglas PEM1, PEM2, PEM3 e PEM4 para exibir as respostas dos professores do Ensino Médio:

<u>PEM1:</u> Permutação de 10 com 4 e 6 repetidos



BEM, PRIMEIRO VAMOS ENCONTRAR ALGUNS CAMINHOS POSSÍVEIS

L N L N L N L N L L
L L L L L L N N N N
N N N N L L L L L L

EM TODAS AS SITUAÇÕES OBSERVAMOS QUE EXISTEM 4N E 6L, PORTANTO SE TROCARMOS DE POSIÇÕES 4N E 6L ENCONTRAREMOS UM NOVO CAMINHO, PORTANTO ESSA TROCA DE POSIÇÃO UMA PERMUTAÇÃO, COMO SE TROCARMOS 2L OU 2N O CAMINHO CONTINUA CONTINUA O MESMO, ENTÃO TEMOS UMA PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO.

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

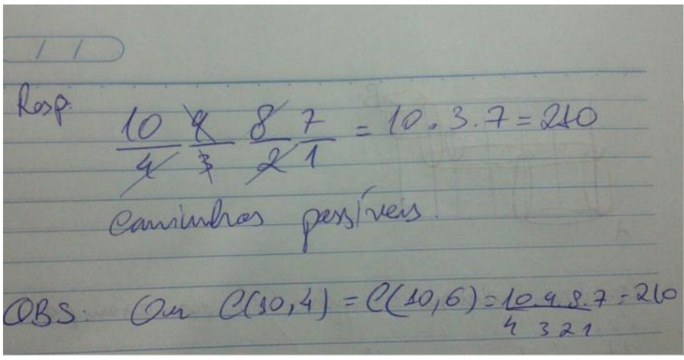
Não usaria combinação com repetição porque não se vê isso no Ensino Médio. Claro que têm detalhes que você apenas fala e pondera aos alunos tentando induzir a permutação com repetição. E aí colocaria a situação de ter que passar por uma farmácia antes, localizando a farmácia em um ponto na malha.

Sim, sempre comento sobre as particularidades entre eles e existem alunos que realmente fazem isso que você falou. E eu explicaria que a combinação simples seria que teríamos 10 lugares para escolher 4 lugares para colocar a letra *n*, ou escolher 6 lugares para a letra l.

Quando observaram a resolução do PEM1, o assunto se desviou para se o uso de fórmulas são ou não válidas no ensino de Análise Combinatória. D2 disse ser totalmente contra o uso, e D1 disse que não concordava, pois os nomes incluem o problema em uma categoria de pensamento (ordenar, agrupar, etc.), e a fórmula seria uma consequência desse raciocínio, mas que antes ensinaria como pensar em cada categoria de problema. Isso evidencia o Conhecimento Especializado, ao escolher a melhor maneira para ensinar um conteúdo, qual percurso metodológico seria interessante.

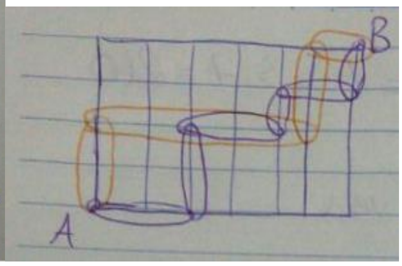
D3 concordou com D1, porém acha que a decisão de utilizar fórmulas e nomes está relacionada ao público, relatando que na sua experiência no pré-vestibular as utiliza, pois os alunos têm um "nível mais elevado", e na escola pública esse processo fica mais complicado. A fala aqui sugere certo pré-conceito sobre a capacidade dos discentes nos diferentes locais onde trabalha, o que pode ocasionar uma mudança de prática de acordo com o público.

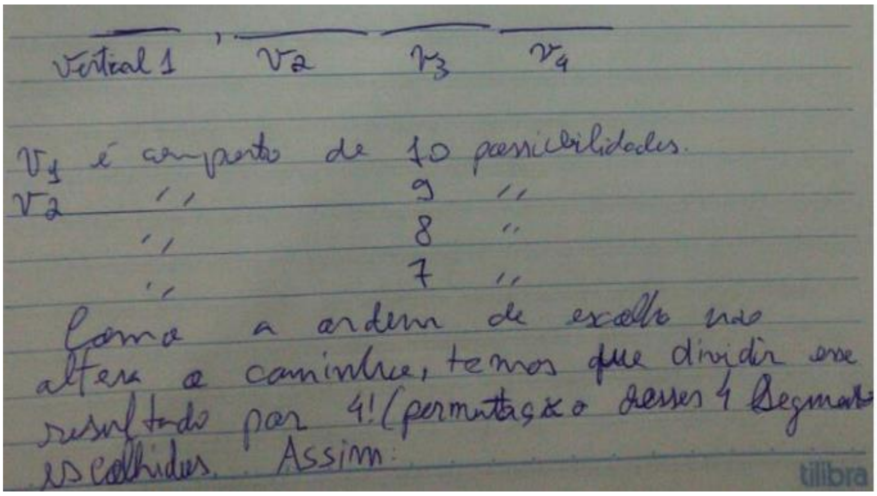
PEM2:



Resp. $\frac{10}{4}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{7}{1} = 10.3.7 = 210$ caminhos possíveis.

OBS: Ou $C(10,4) = C(10,6) = \frac{10.9.8.7}{4\,3\,2\,1} = 210$





vertical 1, v2, v3, v4

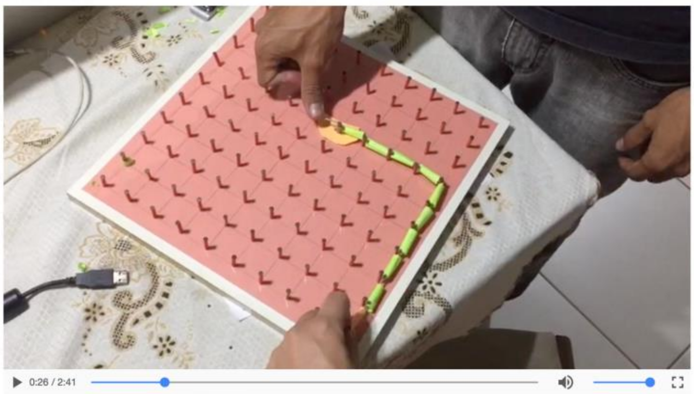
v1 é composto de 10 possibilidades.
v2 " 9 "
" 8 "
" 7 "
Como a ordem de escolha não altera o caminho, temos que dividir esse resultado por 4! (permutação desses 4 segmentos escolhidos. Assim:

Pergunta 2: Meu feedback seria dizer que a resposta está correta. Pois quem está dirigindo tem que tomar 10 deslocamentos, 6 ao leste e 4 ao norte. Logo ele pode combinar as escolhas. C10,6 = C10, 4.

Na resolução do PEM2, as duplas discutiram sobre o uso dos "tracinhos" do princípio multiplicativo para fazer uma analogia à permutação com repetição. D1 disse que permutação com repetição e combinação simples não são coisas equivalentes como D2 e D3 afirmaram, mas isomorfas. Nesse momento, ficou evidente a matemática de um ponto de vista superior, no sentido de Klein (2010), à medida que D1 compreende com mais profundidade as ideias relacionadas à cada tipo de pensamento combinatório. Além disso, ao discutirem diferentes estratégias de resolução do problema, evidenciaram o Conhecimento Especializado e também o Conhecimento Comum do Conteúdo.

PEM3:

Respondeu em forma de vídeo e utilizou combinações simples



A resolução em vídeo do PEM3 agradou a todos pela correção e criatividade, pois segundo eles, ali sim se compreendia que o raciocínio de combinação simples era de escolher 4 movimentos verticais dentre 10 do caminho (e não dos movimentos possíveis da malha) ou, analogamente, 6 movimentos para o leste dentre 10. Isso seria interessante, segundo as discussões, para mostrar que $C_{10,6}$ é numericamente equivalente a $C_{10,4,}$ o que, novamente ressalta o Conhecimento especializado e Conhecimento Comum. Nesse momento, houve discussão sobre o uso de material concreto, que faz parte do Conhecimento de Currículo, ao levar em consideração diferentes materiais e programas para ensino de um conteúdo.

<u>PEM4:</u> 64 maneiras. Eu usaria o PFC.

Da cidade A à cidade B temos duas possibilidades, L e N. Só que para ir de A até B temos 6 etapas para o trajeto. Então para cada etapa, temos duas possibilidades, logo 2x2x2x2x2x2 = 64 maneiras de sair de A e chegar em B. É óbvio que seria interessante fazer uma ilustração no quadro para mostrar o raciocínio e não ficar apenas na retórica.

Acho que seria isso.

A resolução incorreta do PEM4 deixou alguns receosos pois, segundo a turma, explicar uma coisa correta é muito mais simples do que explicar um pensamento incorreto. Apesar de duas duplas terem ido ao quadro tentar explicar qual era o raciocínio incorreto, não chegaram a um consenso. Esse receio foi muito interessante pois não houve julgamento nem depreciação do PEM4 e sua aparente insegurança na fala "Acho que seria isso". O que foi observado foi que à cada escolha entre "norte" e "leste", o PEM4 deixava de contar possíveis caminhos. Nesse momento, observamos que o Conhecimento Especializado não esteve presente, pois não foi possível identificar o porquê do erro, apenas que era um erro, ou seja, o Conhecimento Comum de Conteúdo.

Após a exibição das respostas dos PEM, foram lançadas duas questões disparadoras para discussão coletiva do grupo: (a) *Você acha este problema (sem o caso particular de x e y e sem a figura) adequado para se trabalhar com alunos de ensino médio? Por quê?* (b) *Quais os conceitos, padrões, regras, fórmulas etc., você consegue enxergar dentro desta situação-problema? Destes, quais (e de que forma) você poderia trabalhar com seus alunos no ensino médio?*

Em relação à questão (a) nosso objetivo foi observar especificamente o Conhecimento sobre Matemática e Ensino. D1 acha que seria necessário fazer ajustes na linguagem, incluindo o desenho da malha e números, pois acredita que a linguagem teórica afasta da realidade do problema, mostrando o que tal dupla considera elementar e o que considera difícil para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio. D4 diz que a questão de norte e leste pode confundir os discentes, e complementa que seria interessante falar em menor caminho como na distância do Táxi. Pontua que esse é um problema de semirrealidade (SKOVSMOSE, 2000), já que uma cidade real não é como na malha, mas que isso não é ruim, desde que fique claro que não corresponde à realidade. Além do conhecimento sobre Matemática em Ensino, a conexão que a dupla fez com outros conceitos matemáticos (Geometria não-euclidiana) mostra aspectos do Conhecimento de Horizonte.

Na discussão da questão (b) a turma comentou que os conceitos associados ao problema seriam Geometria do Táxi, combinação completa, combinação simples e permutação. O Conhecimento de Horizonte, o curricular e sobre alunos estiveram presentes, à medida em que o grupo corroborou que nem todos esses conceitos são viáveis no Ensino Médio e para certos níveis de alunos. Nós aproveitamos o momento para mostrar como a Relação de Stiffel pode ser trabalhada com esse problema, assim como o Binômio de Newton e o triângulo de Pascal. Assim, buscamos nesse momento contribuir para o Conhecimento Comum e o Conhecimento Especializado, em uma descompactação do que é necessário para o ensino da matemática.

À guisa de conclusão

A partir dos dados obtidos tanto pelos professores do Ensino Médio como pelos alunos/professores participantes da atividade, identificamos aspectos de cada um dos conhecimentos categorizados por Ball e seus colaboradores. Cabe destacar que esses autores receberam críticas por desenvolverem uma teoria estruturalista, porém nossa visão sobre as categorias incide sobre a riqueza e complexidade do trabalho docente. Para ensinar, o professor precisa ir muito além do conteúdo (SHULMAN, 1986), e no tema de Análise Combinatória todos esses saberes ficaram muito explícitos.

Muitos professores têm insegurança ao ministrar esse tema, o que ficou evidente em um dos professores do Ensino Médio. Por isso, é importante pensar em metodologias de formação de professores que possam auxiliar na (re)construção desses saberes como foi nosso objetivo. Devido a limitação do tempo, não foi possível explorar outros problemas que poderiam ser ricamente discutidos, mas acreditamos ter dado um *start* para a reflexão sobre ensinar Análise Combinatória nos alunos/professores.

Com essa atividade e as reflexões oriundas da mesma, tivemos a oportunidade de buscar (re)construir alguns aspectos de seu conhecimento matemático para o ensino de Análise Combinatória com vistas a agregar conhecimentos para sua prática profissional em sala de aula. Na esteira do trabalho de Shulman (1986), buscamos contribuir para que o Saber (disciplinar) do Conteúdo (Combinatória) destes profissionais se articule com seu saber pedagógico do conteúdo (enunciar o Princípio Multiplicativo de modo a amenizar possíveis más compreensões por parte dos alunos; perceber o melhor momento para introduzir as fórmulas combinatórias que resolvem determinados tipos de problemas etc), culminando num eficaz desenvolvimento profissional e num norteamento para a constante reflexão sobre a sua própria prática docente. Acreditamos que as bastantes discussões que propusemos e mediamos, convergiram para o objetivo principal desta atividade.

Referências

ANDREESCU, T.; FENG, Z. **A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies**. Springer Science & Business Media, 2013.

BALL, D. L.; THAMES, M. H. T.; PHELPS, G. **Content Knowledge for Teaching, What Makes It Special?** Journal of Teacher Education p. 389-407, 2008.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. **Using Tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts.** Journal of Mathematics Teacher Education, v. 10, n. 4-6, p. 301-309, 2007.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 2003.

EVEN, R.; BALL, D. **The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*.** 2009, New York, NY: Springer.

GERALDI, C. M. G; MESSIAS, M. G. M.; GUERRA, M. D. S. **Refletindo com Zeichner: um encontro orientado por preocupações políticas, teóricas e epistemológicas.** Cartografias do trabalho docente, v. 3, p. 237-276, 1998.

KLEIN, F. **Matemática elementar de um ponto de vista superior-Volume 1-primeira parte: Aritmética**. Tradução de Tiago Pedro e Suzana Metello de Nápoles. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010.

RANGEL, L. G.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. **Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações.** *Professor de Matemática Online* – SBM. No. 1, v.2. ISSN 2319-023. 2014.

SHULMAN, L. S. **Those Who Understand: Knowledge Growth In Teaching.** Stanford University. 15, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform.** Harvard educational review, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação.** Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.