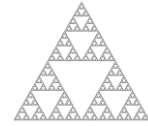




VI Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática



HISTÓRIA DE AULA DE MATEMÁTICA ARITMÉTICA MODULAR: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Marco Antonio Di Pinto
marco.antonio@unimes.br

Michel Da Costa
michel.costa@unimes.br

Elizabeth Magalhães De Oliveira
emaga@uol.com.br

Resumo:

O presente relato de experiência retrata a atuação de um professor orientador do Programa de Iniciação Científica da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) na construção de uma sequência didática envolvendo assuntos relacionados à aritmética modular de forma a obter subsídios que permitam verificar se há possibilidade desse objeto de estudos ser inserido com maior ênfase na Educação Básica. A Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud) e a categorização dos conteúdos (Zabala) foram consideradas para embasar teoricamente nossa pesquisa, considerando também os avanços curriculares atuais propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A investigação em sala de aula possibilitou verificar que na Educação Básica a Aritmética Modular já possibilitaria que os alunos ganhassem mais autonomia a ponto de perceber regularidades, elaborar conjecturas, e argumentar acerca das validades dos seus resultados encontrados nas situações problemas criados.

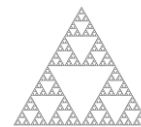
Palavras-Chave: Aritmética Modular. Educação Básica. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de certo modo de verificar a possibilidade de inserção do ensino da aritmética modular na escola do ensino básico.

Para construir esse relato de experiência que deu origem à pesquisa que desejamos desenvolver, temos inicialmente a questão que norteia nossa investigação: *“Estaria o ensino básico pronto para absorver uma gama um pouco maior de conteúdos pertencentes à aritmética modular?”* E se estivesse, de que forma esses objetos deveriam ser tratados?

Na ânsia de responder tal questionamento, fizemos a revisão da literatura no assunto em publicações científicas em diversas fontes, aliadas às ideias pertinentes em documentos



oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e a atual Base Nacional Comum Curricular (2017).

Nossas preocupações para com o ensino da aritmética modular se iniciaram a partir das conversas com o professor Marco Antonio Di Pinto, que conforme relata o mesmo, iniciou-se de certa forma no ano de 2005 quando fora convidado para trabalhar no programa da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública). O modelo inicial do programa colocava todos os alunos participantes numa mesma sala de aula, apesar de os alunos possuísem diferentes faixas etárias.

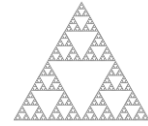
Cabia ao pesquisador como professor orientador da turma conduzir as leituras dos cadernos que o programa colocava a disposição.

Para grata surpresa do professor pesquisador, os estudantes se deleitavam, com as discussões efetuadas, todas embasadas no caderno de Abramo Hefez, o primeiro caderno (apostila) utilizado com o título de “Iniciação a Aritmética”. As conversas fluíam com enorme tranquilidade.

É certo que nesses nove anos em que atuou como professor orientador o programa foi sofrendo mudanças de forma a atender as exigências de cada nova turma. Se no início do programa o trabalho era desenvolvido com todos os alunos de diferentes faixas etárias numa mesma sala; cerca de 10 anos após, a forma como os alunos eram agrupados era bem diferente.

No modelo de 2014-2015, os alunos possuíam um campo conceitual mais próximo uns dos outros, devido ao estreitamento da faixa etária; em outras palavras, não era dado a todos os alunos os mesmos objetos matemáticos explorados no passado. E mesmo que os objetos fossem os mesmos, eles eram apresentados de forma diferente, se adequando mais a faixa etária, e ao campo conceitual que cada faixa etária em tese deveria possuir.

De posse dessas informações passamos a construir o nosso trabalho.



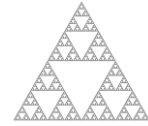
DESENVOLVIMENTO

Iniciamos com uma citação de Marco Antonio Vieira (pp.7-29, 2002), que ao citar Vergnaud lembra que para o mesmo, que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem (1982, p. 40). O campo conceitual é, para ele, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. O domínio de um campo conceitual não ocorre em alguns meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos se quisermos que os alunos progressivamente os dominem. De nada serve tentar contornar as dificuldades conceituais; elas são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas, mas isso não ocorre de um só golpe (1983, p. 401).

Por sua vez, Zabala (1998) propõe a prática educativa exige um tratamento *com modelos teóricos e referenciais de determinam as tomadas de decisões*. Apresenta estudo comparativo do ensino, avaliando conteúdos conceituais, procedimentais, factuais e atitudinais e apresenta modelos de intervenção pedagógica diferentes, onde podem dar prioridades às capacidades cognitivas conceituais, numa interpretação acumulativa, ensino uniformizador, essencialmente transmissivo; ou, num papel mais global de abarque às capacidades da pessoa: uma proposta de compreensividade e de formação integral, abordagem construtivista, respeitada a diversidade dos alunos e o processo de construção do conhecimento.

No trabalho realizado na OBMEP, o Caderno de Abramo Hefez era seguido de certo modo de ponta a ponta, com as aulas construídas sob a forma de um caráter investigativo. O professor Marco Antonio, orientador da turma, jamais formalizava os conceitos pertinentes a aritmética modular, sem antes ouvir seus alunos, que se posicionavam acerca de qualquer objeto discutido.

Essa forma de conduzir as aulas, fazendo com que os alunos percebessem por si só as regularidades provenientes de cada tema posto em discussão, fazendo com que os alunos fossem incentivados a criar conjecturas e argumentar suas posições, foi o que fez com que



esse grupo de três pesquisadores (Marco, Elizabeth e Michel) começasse a construir o trabalho que estão efetuando, trabalho esse que pretende buscar subsídios para se posicionarem se os objetos pertinentes a aritmética modular possam ou não ser inseridos de uma forma mais sólida na educação básica, e que tipo de construção de raciocínio esses objetos seriam capazes de fomentar.

Para tentar responder as essas perguntas que tanto nos inquietam, fomos observar que tipo de exercícios, que tipo de construção era realizado em cada aula da OBMEP, de forma a levar os alunos a construção do conhecimento desejado.

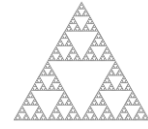
As aulas se iniciavam pelas operações com os números naturais, dando ênfase a discussão da representação de um número natural em potências de base dez, de forma a poder debater com os alunos, os critérios de divisibilidade sem o uso de congruência módulo m . Esses exercícios, apresentavam um certo grau de abstração e concentração.

Outro tipo de exercício que podemos salientar dizia: Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado perfeito, isto é, um número da forma a^2 , onde “ a ” é um número natural só pode ser 0;1;4;5;6 ou 9. Esse exemplo de certo modo evidenciava a percepção de regularidades de uma forma tranquila, de uma forma perceptível ao extremo, era um excelente exemplo para uma das discussões que estavam por iniciar.

As aulas prosseguiram pela discussão do Teorema Fundamental da Aritmética que possibilitava “verificar” se um número natural era ou não, um número primo. Era esse o último tema discutido antes da apresentação do conjunto dos números inteiros. Depois os alunos prosseguiram com a apresentação dos múltiplos e divisores de um número inteiro, cujos objetos eram sempre construídos de forma investigativa.

Abaixo mais uma vez transcrevemos um exercício que fez parte dessas discussões ao longo dos anos em que o pesquisador Marco Antonio trabalhou como professor orientador no programa (Problema 3.8)

Mostre que os múltiplos inteiros comuns de dois elementos “ a ” e “ b ” possuem as seguintes propriedades, dentre as quais destacamos o quinto item.



Se m e m' são múltiplos comuns de “ a ” e “ b ” então $c \times m + f \times m'$ é múltiplo comum de “ a ” e “ b ” quaisquer que sejam os inteiros “ c ” e “ f ”.

Dando continuidade a apresentar a forma como as aulas eram conduzidas, podemos dizer que elas prosseguiram explorando as propriedades do $\text{mdc}(a,b)$ na qual podemos destacar exercícios do tipo: “Mostre que sen é um número ímpar então o $\text{mdc}(n,2n+2)$ é 1.” O algoritmo da divisão euclidiana também era explorado de forma que as divisões em \mathbb{Z} pudessem ser realizadas.

Acreditamos que os exemplos mostrados acima, de certa forma permitiam com que a percepção de regularidades fosse aguçada. Nessa linha de construção de aulas, o conjecturar era presente em todos os encontros. Sempre os argumentos dados pelos alunos eram discutidos.

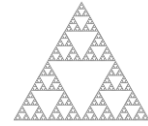
As aulas prosseguiram explorando a ideia de paridade para então trabalhar o $\text{mmc}(a,b)$ dos quais transcrevemos: “Sendo n um número qualquer, mostre que o número $n(n+1)(2n+1)$ é sempre múltiplo de 6”. Depois era explorado o algoritmo das divisões sucessivas, que embasavam o Teorema de Bezout.

De posse dessas informações, o aluno discutiria as Equações Diofantinas Lineares, conforme mostra o exemplo: “De quantos modos podemos comprar selos de cinco e de três reais, de modo a gastar cinquenta reais”.

O capítulo 4 do Caderno de Abramo Hefez é aquele que de certo modo fechava o tema para os jovens estudantes, pois o capítulo 5 do livro apresentava uma série de problemas suplementares que reforçavam ou ampliavam alguns conceitos já discutidos; e porque não dizer, sedimentados para a turma de um modo geral.

Nossas atenções se voltam para o Capítulo 4, onde a ideia de congruência módulo m , era explorada. A riqueza das discussões efetuadas nos exercícios dos capítulos 4 e 5, mostravam o quanto a turminha havia absorvido tais conhecimentos.

E foi a partir dessas discussões que fechavam o curso, que surgiram as indagações do professor Marco Antonio e que hoje fazem parte das indagações de todos nós três pesquisadores:



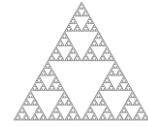
- Estaria a Educação Básica pronta para receber com maior ênfase o assunto denominado aritmética modular? E se estiver; com que grau de complexidade?
- A discussão desses objetos irá fazer com que os educandos da Educação Básica, ganhem um poder maior de abstração, de modo a criar conjecturas, e começar a adquirir certa tranquilidade em fazer argumentos, tais como desejam os PCN?
- Poderiam assuntos relacionados a esse tema serem discutidos numa sala de aula heterogênea, no que diz respeito a trabalhar com alunos que talvez não tenham “aparentemente” uma facilidade em matemática?

CONSIDERAÇÕES

Para os PCNs, “no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica, deve dar-se o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização”.

Avaliando esta proposta, então estaria a aritmética modular contribuindo para essa formação? Procurando responder, verificamos que num primeiro momento sabemos que a aritmética modular, independente por onde se inicie essa discussão, não se põe como um simples exercício de memorização. Identificamos evidências de exame de regularidades que estão ligadas à aritmética modular. Pudemos constatar e registrar que a redução ao primeiro quadrante tão bem explorada no ensino médio, permite ao aluno perceber a relação existente entre os senos de 30 graus; 390 graus, 750 graus, entre outras regularidades ali discutidas (pesquisa de Evandro Pinheiro, sobre Trigonometria). Este estudo nos mostrava que o exame, o exercício da procura das regularidades, está presente no ensino básico. Mas, qual construção deve ser utilizada para que a aritmética modular possa auxiliar os educandos a perceber essas regularidades, e criar conjecturas a partir delas.

Sabemos que essa construção passa por uma sequência didática bem analisada, bem construída a partir de um desenvolvimento lógico de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas que intencionalmente levem o aluno à construção desse raciocínio. A



metodologia e o planejamento organizado com os conteúdos providos de uma proposta de investigação e exploração do aluno, com a intervenção do professor à medida que possa obter melhores resultados de aprendizagem, poderão compor o quadro de realização dos objetivos esperados.

Como estudo científico e pesquisa junto a alunos e professores, nossa parceria com a Universidade onde desenvolvemos estes estudos vem consolidando o tripé: ensino, pesquisa e extensão, à busca de um ensino adequado ao atual aluno, apresentando a Aritmética Modular com foco realista e desafiador às necessidades cotidianas.

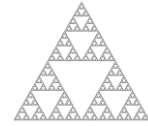
Em termos de ensino podemos dizer que as preocupações com a Aritmética modular, são exploradas em dois momentos distintos na nossa Universidade: Teoria dos Números I e Teoria dos Números II elencadas para explorar assuntos que contemplem a aritmética modular.

Nesse cenário podemos dizer que nessas duas disciplinas exploramos de certo modo o que é trabalhado no caderno de Abramo Hefez, acrescido da construção do conjunto dos racionais, o princípio da indução matemática, além da teoria dos Anéis e Corpos; seguidos da Criptografia Método de Hill.

Em termos de extensão; podemos dizer que os assuntos adjacentes a aritmética modular são contemplados pela disciplina Álgebra Moderna na Educação Básica, uma disciplina pertencente ao curso de pós graduação em Educação Matemática. Essa disciplina aborda alguns dos assuntos comentados acima, acrescidos do Teorema do resto chinês e da aritmética presente no código de barras.

Citamos o Ensino e a Extensão para mostrar que nossa preocupação com os assuntos relacionados à aritmética modular se fazem presentes em nossas conversas quase que diuturnamente.

A preocupação com a pesquisa se faz presente a todo instante. No momento, dando continuidade a nossa pesquisa e discussão, podemos dizer que um mini curso em Canoas será oferecido pelo grupo de pesquisadores de modo a ampliar o nosso leque de informações em relação as nossas indagações.



CONCLUSÕES

Se tivermos que escolher algumas palavras que norteariam nossas preocupações para com o modelo de ensino atual; diríamos que essas palavras poderiam ser expressas pela não dicotômica posição “Conjectura e Argumento”.

Os PCNs alertam que a Educação Básica deve preparar o aluno para o mundo moderno, para que ele seja um cidadão crítico, para que ele saiba refletir acerca dos problemas que o cercam, que saiba se posicionar, que saiba verificar a validade de seus resultados encontrados. Na criação desse conhecimento, contudo, interferem processos heurísticos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas do conhecimento. A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático.

O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

E é esse caráter indutivo que desejamos fomentar no nosso educando. Fazendo com que o mesmo seja capaz de criar conjecturas que o permitam generalizar, fazendo com que o mesmo adquira competências e habilidades para lidar com os conteúdos dessa natureza.

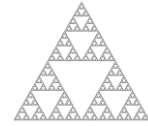
E nada melhor do que a aritmética modular para navegar nesse tipo de situação.

Acreditamos que a aritmética modular gera ganhos que façam com que os alunos; independente do seu campo conceitual; saibam fazer conjecturas acerca das regularidades percebidas, de modo a tentar verificar a validação de seus resultados.

Não pretendemos através dessas discussões, que o aluno faça demonstrações cujo rigor transcende a sua forma de pensar matematicamente, mas queremos verificar se a aritmética modular é uma ferramenta poderosa em permitir que os alunos construam



VI Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática



argumentos para justificar suas posturas adotadas; e é isso que nos motiva a dar prosseguimento a essa pesquisa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática - Ensino Fundamental Ciclos III e IV, 1998.

GRASSI, A.F. **Crêterios de divisibilidade e Aplicaçãõ em sala de aula**,– UNESP – São José do Rio Preto, 2015.

HEFEZ, Abramo, Caderno 1 – PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, 2005.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud – O ensino de Ciências e a pesquisa nesta área**. *Investigações em Ensino de Ciências* – V7 (1) – pp.7-29, 2002.

PEREIRA, R S e outros. **Aritmética modular e suas possibilidades na formação continuada de professores de Matemática** - XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011

PINHEIRO, E. **O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico**. Belo Horizonte, 2008

POMMER, W.M **Equações Diofantinas Lineares: Um desafio motivador para alunos do Ensino Médio**– PUC – SP, 2008

VERGNAUD, G. **La Théorie des Champs conceptuels**. *Récherches em Didactiques des Mathématiques*, 10 (23), 1990.

VERGNAUD, G. **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos**. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, nº 04: 9-19.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa: como ensinar**. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre, ARTMED, 1998.