CAMINHO ALTERNATIVO PARA ESTUDAR EQUAÇÃO QUADRÁTICA E SUAS RAÍZES

Maria Aparecida de Jesus Salgado
salgado_gomes@yahoo.com.br

Jenny Patricia Acevedo Rincón
jennyacevedorincon@gmail.com

Marcos Paulo de Oliveira
marosp_oliveira_@hotmail.com

Resumo:
Uma das preocupações do ensino de Álgebra refere-se às equações de segundo grau. A partir de um contexto heterogêneo, encontrado em uma sala de aula, de nono ano, foi necessário buscar diferentes abordagens e materiais manipulativos almejando alcançar sentido e significado para o conteúdo a ser ensinado. Ao analisar as propostas de Acevedo, Acevedo e Flórez, Fanti e Kodama para o ensino de fatoração algébrica, foram surgindo possibilidades para adaptar ao público alvo. O presente artigo tem por objetivo identificar e associar diferentes representações visuais referente fatoração de equações quadráticas, usando o material concreto *Algeplan* e o aplicativo *GeoGebra* como apoio didático. O estudo de funções quadráticas foi desenvolvido com base no seguinte roteiro: I) Exploração do material entregue aos grupos e indicações gerais da atividade; II) Identificação das formas tridimensionais referente ao *Algeplan*; III) Cálculo de áreas conhecendo os lados (expressão polinomial); IV) Fatoração de diferentes equações quadráticas; V) Cálculo das raízes; VI) Associação entre as formas retangulares e quadradas com as raízes das equações; VII) Registro das expressões fatoradas; VIII) Exploração da soma e produto das raízes; IX) Exploração da construção gráfica com o *GeoGebra*. E foi transitando pelas diferentes representações de equação do segundo grau (algébrica, geométrica e gráfica) que tornou-se possível refletir sobre suas potencialidades dando significado ao estudo de equações quadráticas, dado um assunto que, de modo geral, os alunos apresentam bastante dificuldade para compreender.

Palavras-chave: Algeplan, Fatoração, Equações quadráticas e GeoGebra

Introdução

O professor, estando à frente de uma sala de aula, tem como objetivo a busca do desenvolvimento individual de cada aluno, assim como a qualidade desse. Então o que fazer para ensinar resolução de equação do segundo grau sabendo que sua turma é composta por alunos oriundos de diversas escolas, ou seja, com diferentes níveis de defasagens e com casos de inclusão, sem laudo médico?

Esta foi a angústia que eu, primeira autora, vivi em 2016 na E.E. Patriarca da Independência em Vinhedo – SP, ministrando aula para uma sala de nono ano, composta por trinta alunos.

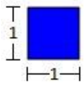
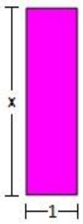
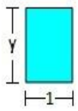
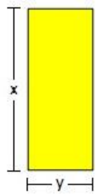
Ao pesquisar abordagens diferentes para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, uma luz surgiu ao encontrar o artigo de Ermínia de Lourdes Campelo Fanti e Hélia Matiko Yano Kodama, ambas da UNESP - Campus São José do Rio Preto, e a tese de mestrado (2004) da Jenny Patricia Acevedo Rincón da Universidade Industrial de Santander, na Colômbia. As duas leituras referiam-se ao uso do material manipulativo Algeplan para ensinar fatoração e funções quadráticas. O objetivo do primeiro artigo (Ermínia L. C. Fanti e Hélia M. Y. Kodama) era relacionar figuras geométricas planas (quadrados e retângulos) com expressões algébricas do primeiro e segundo graus, monômios e polinômios, resolução de equações do primeiro grau e fatoração de trinômios do segundo grau. Assim como o segundo artigo (Jenny P. Acevedo Rincon) também explorou fatoração de polinômios.

O uso do Algeplan ajuda a dar significado às fatorações além de ser uma forma de promover a motivação da sala para o trabalho em equipe.

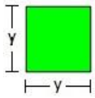
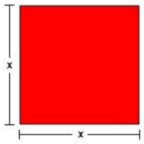
1. **Conhecendo o Algeplan**

O Algeplan é um material manipulativo constituído por peças retangulares. Através de suas áreas é possível realizar operações com polinômios de no máximo grau dois. Suas peças possuem as seguintes características:

Tabela 1: Construção dos retângulos

Retângulos	Área	Valor	Obtenção
	**1** u.m. × **1** u.m. = **1** u.a.	1	É obtido pela área do quadrado de lado unitário.
	**1** u.m. × **x** u.m. = **x** u.a.	x	É obtido pela área do retângulo com um dos lados unitário e o outro medindo **x** u.m.
	**1** u.m. × **y** u.m. = **y** u.a.	y	É obtido pela área do retângulo com um dos lados unitário e o outro medindo yu.m.
	**x** u.m. × **y** u.m. = **xy** u.a.	xy	É obtido pela área do retângulo com um dos lados medindo **x** u.m. e o outro medindo **y** u.m.

ISSN 2318-7948

	**y** u.m. × **y** u.m. = **y²** u.a.	y^2	É obtido pela área do quadrado de lado medindo **y** u.m.
	**x** u.m. × **x** u.m. = **x²** u.a.	x^2	É obtido pela área do quadrado de lado medindo **x** u.m.

Legenda: u.m: unidade de medida
Fonte: Tradução da tabela de Acevedo e Flórez (2017)

Apesar da medida unitária, x e y serem arbitrárias, as três obedecem a seguinte relação: a medida unitária é menor do que a medida y, e a medida y é menor do que a medida x.

O Algeplan pode ser adquirido numa loja de brinquedos educativos ou ainda pode ser confeccionado pelos alunos usando papel cartão, cartolina, EVA, ou outro material que estiver acessível a todos.

2. Algeplan na sala de aula

Após apresentar aos alunos o material, foi combinado que as atividades seriam realizadas preferencialmente em duplas, que utilizariam somente três tipos de peças, conforme tabela abaixo, e que cada equipe deveria confeccionar o próprio material, usando cartolina.

Tabela 2: Relação das áreas e os lados dos retângulos

:

Lado	1	x
1	1 u.a	1.x u.a
X	1.x u.a	x² u.a

Fonte: Construção da primeira autora

Como o esperado, houve amplo envolvimento dos alunos durante a confecção dos materiais prometendo grandes aprendizagens num futuro próximo.

Antes de iniciar com o conceito de fatoração, esclareci aos alunos a relação que existe entre cálculo de área e fatoração, visto que para calcular área de quadrado ou retângulo multiplicamos seus lados e o processo de fatorar ao transformar a soma em uma multiplicação.

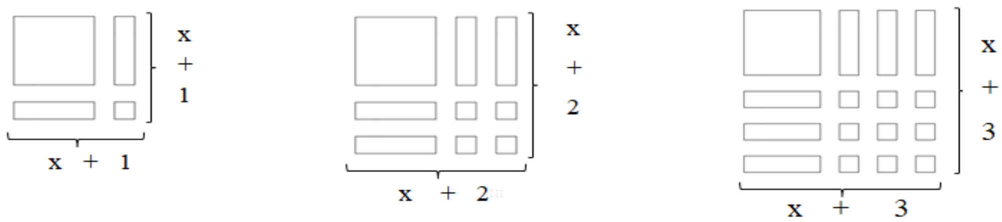
ISSN 2318-7948

3. Fatoração do trinômio do quadrado perfeito

Optei por iniciar com o trinômio do quadrado perfeito pensando em explorar soma e produto de dois números.

Cada aluno deveria pegar a quantidade de peças de acordo com a expressão a ser fatorada, como por exemplo, para a expressão $x^2 + 2x + 1$, pegar uma peça de área x^2, duas peças de área x e uma peça de uma unidade de área, com essas peças deveriam construir uma figura, de modo a formar um quadrado ou um retângulo, calcular a medida dos lados dessa figura e multiplicar seus lados. Além de fazer todos os registros no caderno, inclusive os desenhos, anotar cada passagem, as dúvidas, as descobertas, entre outras anotações.

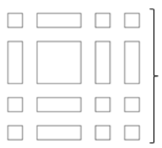
$x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad$ $x^2 + 4x + 4 = 0$ $\quad$ e $\quad$ $x^2 + 6x + 9 = 0$



$(x + 1) . (x + 1) = 0$ ou $(x + 1)^2 = 0$ $\quad$ $(x + 2) . (x + 2) = 0$ ou $(x + 2)^2 = 0$ $\quad$ $(x + 3) . (x + 3) = 0$ ou $(x + 3)^2 = 0$

Figura 1: Descrição da produção esperada dos alunos

Ao formarem a nova figura, eu disse aos alunos que havia um segredo escondido na construção e que mais tarde, compreendendo o segredo eles poderiam substituir o desenho. Quase todos perceberam que o número independente era um quadrado perfeito (um número vezes ele mesmo) e que o coeficiente de “x” deveria ser dividido em duas partes iguais de modo a acomodar as unidades para dar origem a uma nova figura, que no caso **formou um quadrado**. Porém, houve alunos que optaram por uma formação diferente, como a que seque abaixo:



$(x + 3) . (x + 3)$

Nesse caso, valorizei a forma fatorada, mas procurei enfatizar que talvez aquela formação pudesse estar escondendo o segredo procurado, solicitei mais uma possibilidade de agrupar as peças, além daquela apresentada por eles.

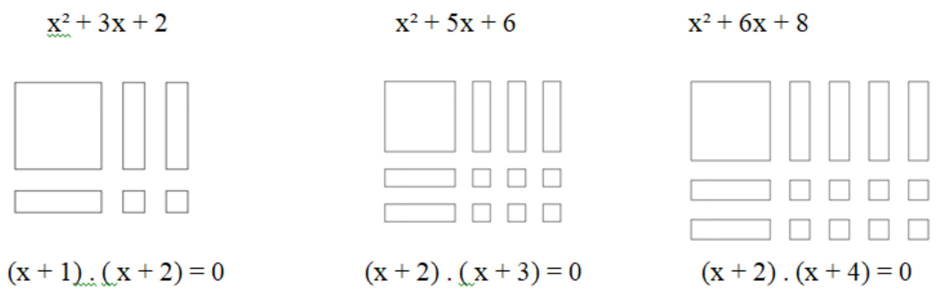
Houveram também casos que o aluno que não queria mais utilizar o Algeplan, todavia, estava-lhe sendo exigido o registro do desenho no caderno e para a surpresa... não conseguia desenhar, ou seja, continuava preso ao concreto, não estava pronto para abstrair.

Embora tenha tido esses casos, o próximo passo era descobrir qual o valor que “x” deveria assumir para tornar a sentença verdadeira, ou seja, para a equação ser igual a zero. Chamei atenção de todos para observarem que eram dois fatores iguais (porque a figura formada era um quadrado), de forma que deveriam encontrar dois valores iguais.

4. Fatoração do trinômio do segundo grau

De modo análogo, o objetivo era formar quadrados ou retângulos para multiplicar os seus lados.

Exemplos utilizados:



Nesse caso alguns quiseram desistir, mas quando o primeiro aluno entendeu qual era o segredo, todos passaram a fazer as associações, assim as energias positivas vibraram por toda aula. A sensação de descoberta levanta a autoestima, abre o canal de aprendizagem.

Pedi pra relatarem o segredo, segue fala da aluna Ariane:

> *"É muito fácil, as barras das laterais juntas são iguais ao número que acompanha "x" e as unidades são a multiplicação da quantidade das barras que estão nas laterais".*

Em outras palavras, o segredo era a soma e o produto de dois números.

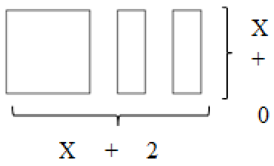
Solicitei *que descobrissem* os valores que "x" deveria assumir para tornar a sentença verdadeira e *que os comparassem* com os valores e formato *das figuras* nos casos anteriores (trinômio do quadrado perfeito).

Destacaram, sobretudo que antes tinham dois valores iguais para "x" porque se tratava de um quadrado e que agora os dois valores eram diferentes porque não era mais um quadrado e sim um retângulo.

5. Outros casos

$$x^2 + 2x = 0$$

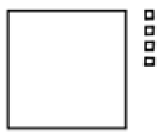
$$(x + 0) . (x + 2) = 0$$



Aqui puderam perceber que sempre teriam o zero como uma das soluções da equação e que, como todo número multiplicado por zero é igual à zero, não há unidades na expressão.

Em outro exemplo, o aluno observa que não formou nem quadrado nem retângulo.

$$x^2 + 4 = 0$$



Concluindo que não há soma e produto, então não existe resolução dentro do conjunto dos números reais.

Enfim, chegou o momento de testar se realmente haviam entendido a utilidade do segredo descoberto. Não quis arriscar e utilizar a sobreposição de peças para trabalhar com a subtração, pois poderia por tudo a perder, sendo assim pedi para guardarem as peças, visto que já tinham condições de fatorar usando a soma e o produto de dois números.

Exemplos utilizados:

$x^2 - 8x + 16 = 0$ $\quad$ $x^2 + x - 2 = 0$ $\quad$ $x^2 - 2x - 15 = 0$

(x – 4). (x – 4) =0 (x – 1). (x + 2) =0 (x + 3). (x – 5) =0

No início houve um pouco de resistência, mas depois deu tudo certo. Conseguiram fatorar e encontrar a soluções desejadas usando soma e produto de dois números.

6. Algeplan x GeoGebra

Utilizar o GeoGebra foi tão significativo quanto utilizar o Algeplan, a escola possui uma sala de informática com vinte computadores funcionando, descobri que alguns alunos nunca tinham mexido num computador, muito menos no aplicativo Geogebra.

Deixei para contar desse momento por último, mas na verdade não foi a última coisa que fizemos, a cada passo que era dado em sala de aula, era também testado no Geogebra para ver o que acontecia. E tudo tinha que ser anotado e relacionado com as descobertas anteriores.

Sem palavras para descrever as alegrias proporcionadas durante essas aulas. Aos poucos fui lançando questões de aprofundamento nas relações encontradas entre a equação de origem, sua representação como área e sua forma fatorada com a representação gráfica. Sempre tentado correlacionar uma na outra.

Com o uso o Geogebra foi possível fazer diversas descobertas:

- A equação do segundo grau representada por uma parábola;
- Toda vez que o coeficiente de x^2 for negativo a concavidade da parábola é voltada para baixo e quando for positivo será voltada para cima;
- A equação do segundo grau cuja área fatorada é formada um quadrado tem duas raízes iguais, logo sua representação gráfica encosta uma única vez no eixo “x”;
- A equação do segundo grau cuja área fatorada é formada por um retângulo tem duas raízes diferentes, logo sua representação gráfica cruza o eixo “x” em dois lugares diferentes;
- A equação do segundo grau que **não** possui sua área fatorada formada por um quadrado ou um retângulo, logo sua representação gráfica **não** cruza nem encosta no eixo “x”;

- Toda parábola possui um eixo de simetria, permitindo visualizar a parte crescente e decrescente da mesma;
- O eixo de simetria passa exatamente pelo ponto médio entre as raízes;

- Com o ponto médio entre as raízes é possível identificar o ponto máximo e mínimo da parábola;
- O coeficiente linear é o termo independente (as unidades) e se refere ao ponto onde a parábola cruza o eixo “y”.

E para finalizar é necessário dizer que as atividades foram aplicadas num período de três semanas consecutivas, dando um total de 18 aulas. Tais aulas foram utilizadas como avaliativas, não houve necessidade de uma avaliação escrita/formal, pois a todo o momento eu estava lançando perguntas para os diferentes alunos, de forma a verificar a evolução individual de cada um.

7. Sobre a Oficina

Contamos com a participação de oito professores experientes, que se colocaram na posição de aluno ao desenvolverem as atividades propostas. Infelizmente tínhamos disponível apenas um notebook com o aplicativo Geogebra instalado, havendo então a necessidade de utilizar o Data Show para projetar as gráficas das expressões feitas pelo aplicativo.

Realizada a oficina houve ampla reflexão sobre a potencialidade dos materiais utilizados, para o ensino de resolução de equação do segundo grau, que tais atividades parecem simples, aos olhos de um professor, mas para nossos estudantes não é tão simples assim.

Respeitando a individualidade de cada um, e pensando em melhorar nossa atividade, foi solicitado aos professores que deixassem por escrito uma sugestão/crítica sem precisar se identificar.

Nessas escritas surgiram relatos importantes, dois dos participantes ressaltaram que nunca tinham imaginado encontrar as raízes de uma equação do segundo grau sem ensinar a fórmula de Bhaskara, um deles destacou que o processo utilizado para encontrar a soma e o produto de dois números sem utilizar a sobreposição foi muito tranquilo e pertinente. Outros dois participantes concordaram que o uso do Geogebra enriqueceu a atividade e permitiu ampla visualização.

E as sugestões foram:

- Em relação ao uso do Geogebra é interessante fazê-lo juntamente com o estudo dirigido, explorando o trabalho em grupo;
- Trazer uma situação problema para ser resolvida usando os materiais utilizados (Algeplan e Geogebra)

Considerações finais

Com objetivo de buscar uma dinâmica diferente para se aproximar mais da aprendizagem dos alunos fomos estudando cada caso de equação do segundo grau, tentando decifrar o que mudava e o que era comum em cada um e transitando pelas diferentes representações, algébrica, geométrica (algeplan) e gráfica (geogebra), pude compreender o quanto foi possível avançar qualitativamente. As reflexões e os questionamentos ganharam espaço em nossas aulas, produzindo sentido e significado ao objeto em aprendizagem, permitindo que cada aluno, de acordo com o seu tempo de aprendizagem, pudesse demonstrar avanços satisfatórios.

Em relação a experiência durante a oficina, mais uma vez certifico-me que a formação é contínua, sempre temos o que aprender uns com os outros, um novo olhar ou uma palavra pode fazer toda a diferença.

Referências

ACEVEDO, Jenny; FLÓREZ, Campo Elías. **A teaching experience learning of algebra expressions for future mathematics teachers.** Global Journal of Engineering Science and Research Management, Vol. 4, Issue 8, 2017. Disponível em: < http://gjesrm.com/Archives.html>.

ACEVEDO, Jenny. **El cálculo de áreas como un soporte significativo para la factorización algebraica.** Tesis de especialización. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2004, 147p.

FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; KODAMA, Hélia Matiko Yano. **Ensinando fatoração e funções quadráticas com o apoio de material concreto e informática.** 2006. 15 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Unesp, São José do Rio Preto, 2006. Disponível em: <www.unesp.br/prograd/PDFNE2006/artigos/capitulo2/fatoracao.pdf>.