VARIÂNCIA CONJUNTA DA MEDIDA DOS RAIOS E DA SOMA DAS ÁREAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Willians Adriano de Oliveira
willians_oliveira79@hotmail.com

Nielce Meneguelo Lobo da Costa
nielce.lobo@gmail.com

Resumo:
Este artigo apresenta resultados parciais de pesquisa de mestrado que intenta identificar possibilidades para ampliação/construção do conhecimento profissional de professores participantes de um processo formativo, a partir de reflexões envolvendo áreas de figuras planas e funções quadráticas. A fundamentação teórica vem de estudos de Mishra e Khoeler sobre conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo (TPACK) e de Ponte sobre atividades exploratório-investigativas. A metodologia da pesquisa é do tipo pesquisa-ação, segundo Thiollent, composta de três fases: pesquisa documental e composição de um processo de formação continuada, pesquisa de campo sobre o processo formativo – estruturado em seis encontros de cinco horas cada e seis horas a distância e, por último, análise. Os dados foram coletados em campo por meio de questionário, entrevistas, protocolos dos participantes e gravações de áudio/vídeo. A análise é interpretativa e por análise de vídeos, segundo Powell, Francisco e Maher. Neste texto discutimos uma atividade desenvolvida na formação continuada, a qual teve por objetivo, promover a articulação entre os quadros geométrico e algébrico, investigar a variância conjunta da medida dos raios e da soma das áreas de duas circunferências utilizando o *software GeoGebra*. A análise identificou que o *software* auxiliou na criação, exploração e investigação e que as reflexões e discussões subsidiaram a construção e ampliação de conhecimentos.

Palavra-Chave: Função Quadrática, *Geogebra*, TPACK, Atividade Exploratória Investigativa.

Apresentação

Apresentamos um recorte de uma pesquisa de mestrado, a qual foi realizada em um curso de formação continuada de professores participantes de um Projeto de formação e pesquisa do Programa Observatório da Educação (OBEDUC/CAPES) em parceria com uma Diretoria de Ensino da capital paulista. A pesquisa está em andamento e tem por objetivo identificar e analisar as possibilidades para a ampliação/construção do conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo a partir das discussões e reflexões compartilhadas envolvendo áreas de figuras planas e funções quadráticas, exploradas por meio do *software GeoGebra* 5.0.

Discutiremos o desenvolvimento de uma atividade por professores de Matemática participantes desse curso denominado **“Geogebra no Ensino Médio: aplicações com**

funções quadráticas". A atividade teve por objetivo, promover a articulação entre os quadros geométrico e algébrico, investigar a variância conjunta da medida dos raios e da soma das áreas de duas circunferências utilizando o *software GeoGebra*.

Contexto da pesquisa

O curso de formação continuada teve carga horária de 36 horas, distribuídas em seis encontros de cinco horas cada um e seis horas a distância com o uso de um ambiente de aprendizagem AVA alojado em uma plataforma Moodle.

O processo formativo foi baseado em atividades exploratório-investigativas que envolvem funções quadráticas e áreas. A seguir segue a síntese dos encontros.

Tabela 1: Síntese dos encontros

Fonte: Acervo do Autor

	Atividades Desenvolvidas	**Objetivos**
1º Encontro	Iniciação ao software GeoGebra; Atividade Função quadrática. Apresentação do ambiente AVA	Utilizar ferramentas de construção no software GeoGebra; Compreender a relação entre os coeficientes da função quadrática e seu respectivo gráfico. Subsidiar as ações a serem desenvolvidas a distância
2º Encontro	Atividade no GeoGebra: Função Área de um Retângulo	Criar o ponto P correspondente à relação entre medida x da base e a área do retângulo dado; Determinar a função área do retângulo; Determinar o domínio da função.
3º Encontro	Atividade no GeoGebra: Função Área de um Carretel	Construir a figura desejada; Criar o ponto P correspondente a relação entre a medida x da base e a área do carretel dado; Determinar a função área do carretel; Determinar o domínio da função.

4° Encontro	Atividade no GeoGebra: Função Soma das áreas de dois Triângulos Equiláteros (Inspirado em Venant (2015))	Construir a figura desejada; Criar o ponto P correspondente à relação entre a medida x da base de um dos triângulos e a soma das áreas dos triângulos; Determinar a função área da soma; Determinar o domínio da função.
5° Encontro	Atividade no GeoGebra: Função Soma das áreas de dois Círculos	Construir a figura desejada; Criar o ponto P correspondente à relação entre a medida x do raio de um dos círculos e a soma das áreas dos círculos; Determinar a função área; Determinar o domínio da função.
6° Encontro	Atividade no GeoGebra: Função Área compreendida entre um retângulo e uma circunferência (Inspirado de Bianchini e Paccola (2004))	Construir a figura desejada; Criar o ponto P correspondente à relação entre a medida x do raio da circunferência e a área compreendida entre um retângulo e uma circunferência dados; Determinar a função área da região; Determinar o domínio da função.

No recorte apresentado tratamos da atividade realizada no 5° encontro de formação.

Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica - relativa ao recorte aqui apresentado – veio da teoria desenvolvida por Mishra e Koehler (2006) e denominada *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK), que detalha os conhecimentos necessários para o professor ensinar na presença da tecnologia digital. Segundo os autores, o TPACK é o tipo de conhecimento necessário para os professores desenvolverem uma prática pedagógica eficaz em ambientes de aprendizagem com tecnologia digital (MISHRA E KOEHLER, 2006). Além disso, consideramos os estudos de Ponte (2003) e de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sobre tarefas exploratório-investigativas, nas quais professor e aluno exercem diversos papeis o aluno por vezes exercendo o papel de protagonista e o professor o papel de sistematizador do ensino.

Metodologia

A metodologia da pesquisa é do tipo pesquisa-ação, segundo Thiollent (2003). Nesse tipo de pesquisa, o pesquisador é uma pessoa da prática, ou seja, ele vai além de ser um observador pois, participa e interage com os sujeitos da pesquisa, e que possui anseios de melhorar a compreensão do conteúdo abordado. Assim sendo, o pesquisador e os participantes são sujeitos ativos da pesquisa.

Esta investigação foi desenvolvida em três fases: (1) pesquisa documental e composição de um processo de formação continuada, (2) pesquisa em campo sobre o processo formativo – estruturado em seis encontros de cinco horas cada e seis horas a distância e, (3) análise.

Para o processo de formação continuada foram elaborados seis encontros presenciais que tinham o intuito de promover a articulação entre os quadros algébricos e geométricos com a utilização do *software GeoGebra*, visto que esse *software* possibilita visualizar tanto a figura geométrica, sua função e sua expressão algébrica, o protocolo de cada tarefa que levaria os sujeitos a observarem e explorarem as situações dadas, e assim possibilitando a inserção de questões de cunho exploratório e investigativos. Para promover as reflexões e aprofundamento foram elaboras seis tarefas no ambiente virtual de aprendizagem – AVA, com questões de aprofundamento dos temos abordados nos encontros presencias.

A Coleta de dados foi feita por meio de um questionário de entrada e um de saída, protocolos de atividades desenvolvidas ao longo dos encontros, gravações em áudio e vídeo dos encontros, gravações dos arquivos com as construções dos participantes no software.

A análise foi interpretativa e pelo Método de Análise dos eventos críticos identificados nos vídeos coletados (POWELL, FRANCISCO, MAHER, 2004). Utilizando-se da observação e descrição dos dados do vídeo e já familiarizado o suficiente com seu conteúdo, o pesquisador deverá identificar o que os autores denominam “eventos críticos”.

> Um evento é chamado *crítico* quando demonstra uma significativa ou contrastante mudança em relação a uma compreensão prévia, um salto conceitual em relação a uma concepção anterior. (POWELL, FRANCISCO, MAHER, 2004, p. 22)

Assim sendo, os momentos significativos para a pesquisa são considerados como eventos críticos. Na próxima seção detalhamos uma das atividades desenvolvida na formação continuada.

Atividade no *GeoGebra*: aplicação com função quadrática

A atividade escolhida para discussão neste texto foi a Quinta. Nela o objetivo foi o de promover a articulação entre os quadros geométrico e algébrico, investigar a variância conjunta da medida dos raios e da soma das áreas de duas circunferências apresentadas em um arquivo digital construído no *software GeoGebra*.

Os professores receberam um protocolo com 10 questões de caráter investigativo. Cada professor tinha um *notebook* a sua disposição para realizar a atividade no *GeoGebra*.

Iniciamos solicitando aos professores que iniciassem a construção da figura apresentada a seguir:

Soma das áreas dos círculos

Duas circunferências são tangentes externamente no ponto C, como na figura ao lado.

O ponto C é móvel sobre o segmento AB.

Determine a soma das áreas dos círculos em função de AC.

Seja AB = a = (soma das medidas dos raios)

Seja AC= x = (raio de uma das circunferências)

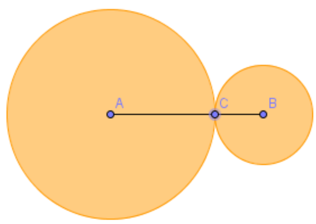


Figura 01: Soma das áreas dos círculos

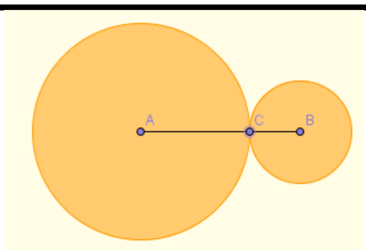
Fonte: Acervo do Autor

Os professores iniciaram de maneira autônoma a construção da figura solicitada. Nesse processo surgiram dúvidas sobre a construção, procuramos esclarecê-las orientando-os para a necessidade de começar construindo o segmento $\overline{AB}$, para então criar o ponto C, de modo que ele pertencesse a este segmento, ou seja, inserir o ponto C no objeto, no caso, o segmento $\overline{AB}$.

Para realização da atividade e padronização da construção com preenchimento do protocolo, solicitamos que o segmento $\overline{AB}$ fosse de comprimento fixo, no caso, $\overline{AB} = 2$.

Permitindo aos professores cursistas que tivessem a mesma construção e visualização posterior do mesmo gráfico. Eles deveriam seguir as instruções do protocolo da atividade, exposto na Figura 03.

Soma das áreas de duas circunferências



Duas circunferências são tangentes externamente no ponto C, como na figura ao lado.

O ponto C é móvel sobre o segmento AB.

Determine a soma das áreas dos círculos em função de AC.

Seja AB = a = (soma das medidas dos raios)

Seja AC= x = (raio de uma das circunferências)

Considere AB = 2, para responder as questões de 1 a 8.

1) Determine a soma das áreas dos círculos em função de AC, denotando essa função por **q(x)**.

2) O que acontece quando x é mínimo? E quando x é máximo?

3) Denominando de ponto **P(x,y)** de coordenadas x = medida de AC e y = q(x) ou seja, (medida da soma das áreas dos círculos). Determine a relação entre a medida do raio do círculo de centro A e a soma das áreas, ou seja, P(x,y) no GeoGebra.

4) Desloque o ponto C e observe o que ocorre com o ponto P. O que você descobriu?

5) Habilite **exibir rastro** para o ponto P e repita o procedimento anterior. O que você descobriu?

6) Construa o gráfico dessa função. Compare com o rastro do ponto P. São equivalentes?

7) O rastro do ponto P percorre toda a parábola? Porque?

8) Quais são os pontos de máximo e de mínimo dessa função?

9) Desabilite exibir rastro do ponto P. Desloque o ponto B e observe o que ocorre com o ponto P. O que você descobriu?

10) Habilite exibir rastro para o ponto P e mova o ponto C.O que aconteceu, houve *mudança* nos círculos? E na função?

Figura02: Protocolo soma das áreas dos círculos

Fonte: Acervo do Autor

Com a construção já realizada os professores cursistas iniciaram o desenvolvimento do protocolo no qual lhes era solicitado:

*1) Determine a soma das áreas dos círculos em função de AC, denotando essa função por **q(x)**.*

Discutimos no grande grupo como proceder para determinar a função solicitada e que nos levou a expor o cálculo no *Datashow*, conforme figura a seguir:

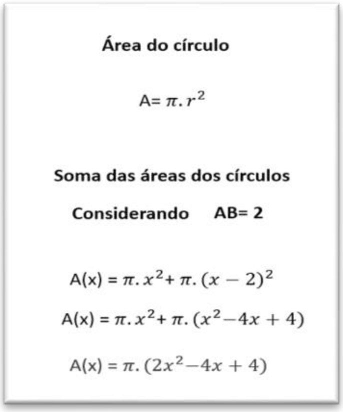


Figura 03: Soma das áreas dos círculos

Fonte: Acervo do autor

Na Figura 03, reforçamos a importância de ter um mesmo comprimento para o segmento $\overline{AB}$, no caso $\overline{AB}=2$. Deste modo, todos os sujeitos escreveram de maneira assertiva a função área (já renomeada conforme solicitado) por:

$$q(x)=\pi(2x^2-4x+4).$$

Na discussão coletiva sobre as questões que deveriam ser respondidas no protocolo, os professores formadores salientaram que se tratava de um intervalo aberto, no caso temos: $0<x<2$, ou seja, o domínio da função é D=]0, 2[.

Sendo assim, deveriam incluir a restrição do domínio e digitar no campo de entrada: $q(x)=\pi(2x^2-4x+4), 0<x<2$, o que ocorreu nas construções de cada sujeito.

Ao analisar os dados, especialmente os documentados em vídeo, percebemos que a questão do domínio da função poderia ter sido mais aprofundada, entendemos que necessitaria mais discussões sobre ele. Nesse aspecto o curso poderia ter auxiliado mais promovendo discussões sobre domínio de função quadrática, de modo a impulsionar o conhecimento do conteúdo.

2) O que acontece quando x é mínimo? E quando x é máximo?

ISSN 2318-7948

Um exemplo de registro escrito por um dos sujeitos está a seguir: Professor C: Se r = 2 só temos uma circunferência quanto x = 0 e x = 2 (referindo a x ser igual a 0 ou igual a 2).

Notamos que o professor C percebe que um círculo “desaparece” quando x= 0 ou x = 2. Isso ocorre pois quando x assume esses valores temos uma situação limite na qual os dois círculos deixam de existir, passando a ter um único círculo de raio 2. São essas as percepções relativas ao que ocorre quando x assume os valores máximo e mínimo possíveis na situação dada.

O registro abaixo é um exemplo de um dos sujeitos:

> Professor W: Quando x é mínimo CB tem o maior valor a maior área e a parábola assume valor máximo, logo esse procedimento irá se inverter para quando o AC tiver o maior valor, r = 2. Quando as áreas assumirem valores iguais, indicará o vértice da função.

O professor W estabeleceu uma conexão entre o que ocorre com as duas circunferências, conforme x é mínimo ou máximo, e o gráfico da função soma das áreas dos dois círculos. Ele notou que quando o segmento CB é máximo temos o valor de máximo da função e isso se repete quando o segmento AC for máximo. Além disso, observou que as áreas assumem valores iguais para o vértice da parábola, que ocorre quando x = 1. O registro abaixo é um exemplo de escrita de um dos sujeitos:

> Professor T – $q(0) = 4\pi,$ $q(2) = 2.\pi.4 - 4.\pi.2 + 4\pi$
>
> $q(2) = 8\pi - 8\pi + 4\pi$
>
> $q(2) = 4\pi$
>
> Os pontos mínimos e máximo terão a mesma ordenada.

O professor T descreveu que quando x for máximo ou mínimo teremos valores de áreas máximas iguais a 4π.

Notamos nesse momento que estes sujeitos estavam ampliando/construindo seus conhecimentos pois, tanto quando x é máximo, quanto quando x é mínimo o valor da soma das áreas tem o mesmo valor de 4π. Observamos que quando x é máximo ou mínimo teremos valores que se aproximam de 4π, mas este fato não fica evidente no *software*, ou seja, necessita do conhecimento do conteúdo para perceber que o *GeoGebra* apresenta um valor aproximado para x máximo ou mínimo e que o domínio desta função está restrito a um intervalo aberto.

Sendo assim, concluímos que temos apenas valor de mínimo para essa função. Como bem observou o Prof. W sobre a localização do ponto de mínimo, que ocorre quando as áreas de cada circunferência forem iguais, portanto no caso para $x = 1$ teremos o vértice da função, no caso o ponto de mínimo da mesma.

3) Denominando de ponto ***P(x,y)*** *de coordenadas x = medida de AC e y = q(x) ou seja, (medida da soma das áreas dos círculos). Determine a relação entre a medida do raio do círculo de centro A e a soma das áreas, ou seja, P(x,y) no GeoGebra.*

Para o desenvolvimento dessa questão era necessário que o professor mobilizasse conhecimento tecnológico do conteúdo. Observamos que os sujeitos não conseguiram realizar no *GeoGebra* a construção do ponto P de forma autônoma. Assim sendo, foi necessário a intervenção dos formadores, era preciso se preocupar com a sintaxe e escrita correta no software, indicando a soma das áreas para termos o valor correto para a variável y (soma das áreas). Por exemplo, vide Figura 04.

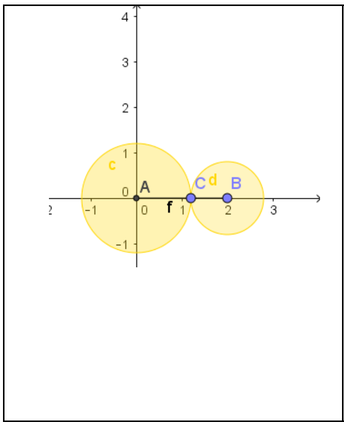
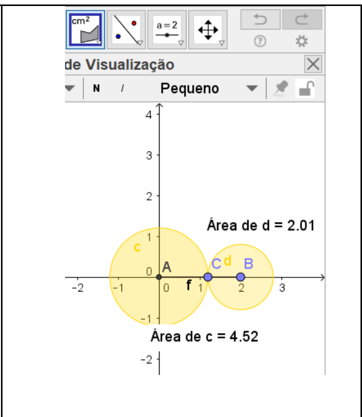
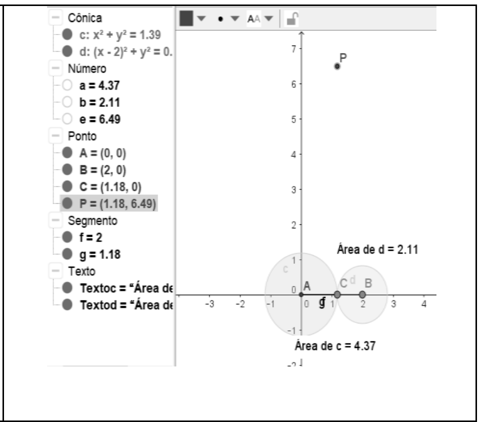
		
a) Dois círculos tangentes ao ponto C;	b) Área de cada círculo.	c) Determinando o ponto P.

Figura 04: Construindo o ponto P

Fonte: acervo do Autor

Na Figura 04 (a), apresenta-se a construção realizada pelos sujeitos dos dois círculos tangentes no ponto C que foi construída de maneira autônoma por todos sujeitos fato que demonstra a mobilização do conhecimento tecnológico do conteúdo. No entanto, a próxima etapa, indicada na Figura 04 (b), apresentou dificuldade para os sujeitos e foi necessário discutir no grande grupo como poderíamos determinar a soma das áreas desses círculos. Indicamos que poderíamos utilizar o comando área (.) e clicar sobre cada círculo que teríamos as respectivas áreas. Na Figura 04 (c), podemos notar do lado direito da figura os números chamados pelo software de a e b que são as medidas das áreas de cada figura, digitando no campo de entrada $a + b$ foi dado o número e o resultado da soma destas áreas, bastando para determinarmos o ponto P solicitado criarmos o segmento $\overline{AC}$, denotado pelo *GeoGebra* por segmento g e, por fim, digitar no campo de entrada: $P = (g, e)$ para obter o ponto solicitado.

Vale destacar que esse não é o único modo de se estabelecer o ponto P o qual poderia ter sua coordenada y relacionada à função área como, por exemplo, a proposta do Professor T, que escreveu no papel: "$P = (\mathrm{x}, 2\pi\mathrm{x}^2 - 4\pi\mathrm{x} + 4\pi)$". Entretanto esse professor não construiu o ponto P desejado no software, evidenciando a necessidade de construção de conhecimento tecnológico do conteúdo.

Explicitamos na Figura 05 a seguir como o ponto P poderia ter sido construído no *Geogebra*.

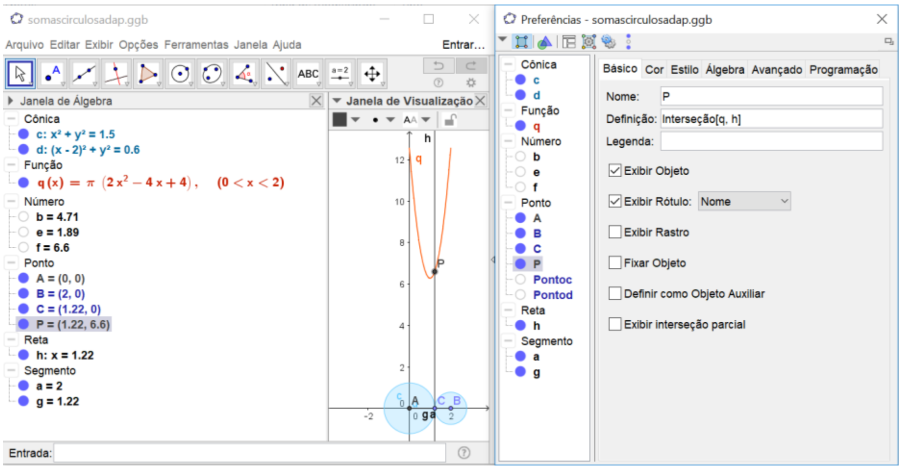


Figura 05: Construção alternativa para o ponto P.

Fonte: Acervo do Autor

Observe que o ponto P é a interseção entre a função $q(x)$ e a $reta$ h que é perpendicular à base passando pelo ponto C. Logo, se movermos o ponto C, o ponto P se deslocará sobre a função $q(x)$ conforme se desejava.

4) Desloque o ponto C e observe o que ocorre com o ponto P. O que você descobriu?

Segue as frases de quatro dos sujeitos:

Professor W – O ponto irá percorrer um intervalo da função q(x).

Professor H – O ponto P faz uma parábola.

Professor A – Ele faz uma parábola.

Professor T – O ponto P "desenha" uma parte de parábola.

Observarmos a percepção dos professores-participantes que estavam tratando da representação gráfica de uma função quadrática, embora nem todos observaram que se tratava de um trecho de uma parábola, desconsiderando a restrição do domínio.

Como já havíamos trabalhado atividades semelhantes a esta, pudemos notar que os sujeitos habilitaram o rastro do ponto P e investigaram a situação, pois responderam da mesma forma as questões 4 e 5 do protocolo.

5) Habilite exibir rastro para o ponto P e repita o procedimento anterior. O que você descobriu?

Escrita de três dos sujeitos:

Professor H – O movimento de uma parábola.

Professor W – O rastro ira percorrer um intervalo da função q(x).

Professor T – O ponto P "desenhara" uma parte de parábola.

Essas descrições dos professores cursistas, nos permitem identificar a mobilização do conhecimento tecnológico do conteúdo, porem nota-se que a restrição do domínio é algo que necessita ainda ser mais explorado.

6) Construa o gráfico dessa função. Compare com o rastro do ponto P. São equivalentes?

Eis as escritas de quatro dos sujeitos:

Professor W – Sim dentro dos intervalos definidos.

Professor T – Serão equivalentes para $D(f) = \{x \epsilon \mathbb{R} | 0 < x < 2\}$.

Professor H – Sim são equivalentes.

Professor A – Sim são equivalentes.

Notamos que para esses professores já estava bem claro que a função soma das áreas das circunferências, com soma dos raios igual a $\overline{AB} = 2$ e x variando entre zero e dois tem como gráfico parte da parábola correspondente à função $q(x) = \pi(2x^2 - 4x + 4)$. Entretanto, para os demais, se fazia necessário a retomada dessa discussão com relação ao domínio da função, para construção/reconstrução de conhecimentos. A figura a seguir foi construída no grande grupo para fomentar a discussão:

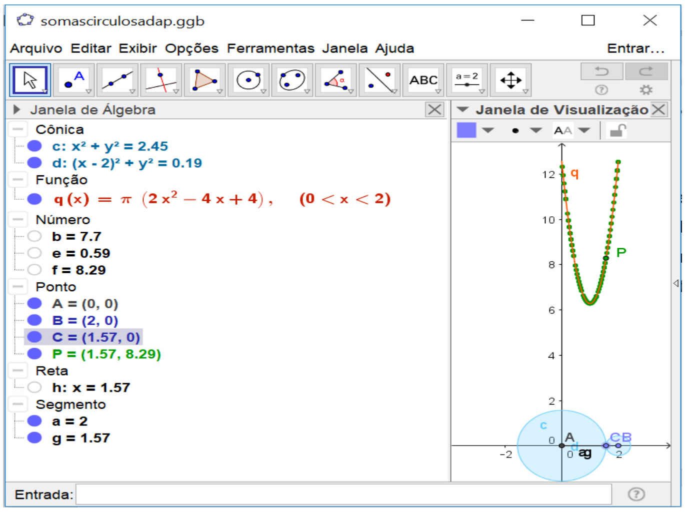


Figura 06: Soma das circunferências, rastro do ponto P

Fonte: Acervo do Autor

Ficou evidenciado para nós, que o grupo estava progredindo pois, de imediato, já falavam sobre a restrição do Domínio dessa função, logo, mesmo não explicitando esse quesito na escrita e sim na fala, estavam construindo/reconstruindo ou ampliando conhecimentos, tanto o específico do conteúdo quanto o tecnológico do conteúdo. A construção no *Geogebra* (vide Figura 06) e a projeção feita com o *Datashow* e as discussões sobre elas auxiliaram nesse processo de percepção e verificação da equivalência das expressões dentro do domínio estabelecido.

7) O rastro do ponto P percorre toda a parábola? Porque?

Quatro dos sujeitos escreveram:

Professor A - Não

Professor T – O ponto P percorre dentro do intervalo x = [0,2]

Professor W – Não! Os raios estão em um intervalo e a função $q(x) = \pi(2x^2 - 4x + 4)$ não.

Professor H – Não, pois o segmento AB = 2, temos um intervalo.

Os sujeitos responderam de maneira correta a questão, e que bem exclamou o Professor W pois a função soma das áreas está limitada em um intervalo. Isso só ficaria explicitado no *Geogebra* se, ao inserirmos no campo de entrada a função $q(x)$, acrescentássemos o domínio da mesma, como indica a Figura 06, ficando limitado a um trecho dessa função. Observamos que esses quatro professores tinham clareza sobre as restrições pertinentes à questão.

8) Quais são os pontos de máximo e de mínimo dessa função?

Reproduzimos aqui as escritas de três dos sujeitos:

Professor H – Quando o ponto C estiver juntos aos pontos A e B teremos os pontos máximos. O ponto de mínimo é o vértice da função.

Professor T – Terá ponto mínimo (vértice) G(1,6.28) [Valores obtidos pelo software].

Professor C – Pontos de máximo, (0,0) e (2,0) ?

Ponto de mínimo (xv, yv)

xv = $\frac{4}{4} = 1$ yv = $\frac{-(4^2-4.2.4)}{4.2} = -\frac{(16-32)}{8} = \frac{16}{2} = 2$

Observamos que atividades com esse tipo de proposta a qual trata de função com restrição de domínio, necessitariam ser discutidas em cursos de formação continuada, de modo os professores posteriormente discutissem com seus alunos situações-problema intramatemáticas, por exemplo, envolvendo geometria e funções como é o caso das tarefas aqui propostas.

No caso, apenas o Prof. T observou de modo assertivo que temos somente ponto de mínimo, pois não há ponto de máximo da função, no caso, por se tratar de um intervalo aberto, ou seja, a função não é definida nos valores em que x=0 e x=2, que são os extremos do intervalo]0,2[. O que poderia ser dito é que quando x tende a zero a função, em seu limite, tende ao valor de máximo aproximado de (12.57) dado pelo software.

9) Desabilite exibir rastro do ponto P. Desloque o ponto B e observe o que ocorre com o ponto P. O que você descobriu?

Segue a escrita de quatro dos sujeitos:

Professor H – O ponto P deslocou de forma diferente.

Professor C – A parábola se desloca para a direita e para cima.

Professor W – O ponto P irá assumir valores para a parábola.

Professor T – O ponto P percorrerá uma parte maior (até x_b).

Notamos que os sujeitos perceberam uma alteração na parábola, que terá um intervalo maior ou menor para deslocar o ponto C de acordo com o novo posicionamento do ponto B, como podemos notar na figura a seguir:

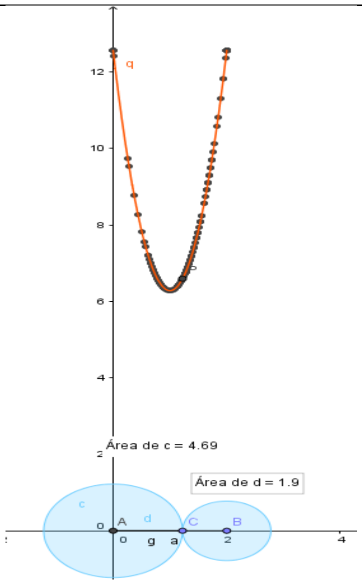
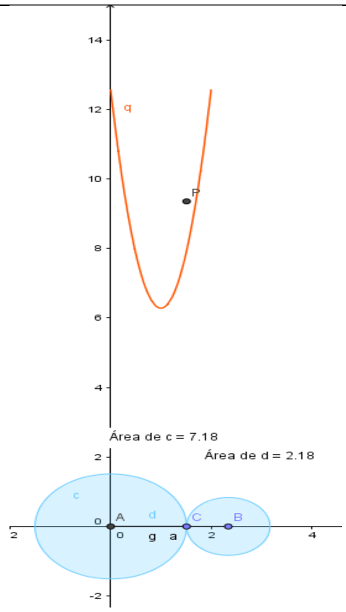
	
a) Segmento $\overline{AB} = 2$ e rastro do ponto P sobre a função com restrição de domínio, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$	b) Segmento $\overline{AB} = 2{,}35$ e o ponto P sobre a função com restrição de domínio, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

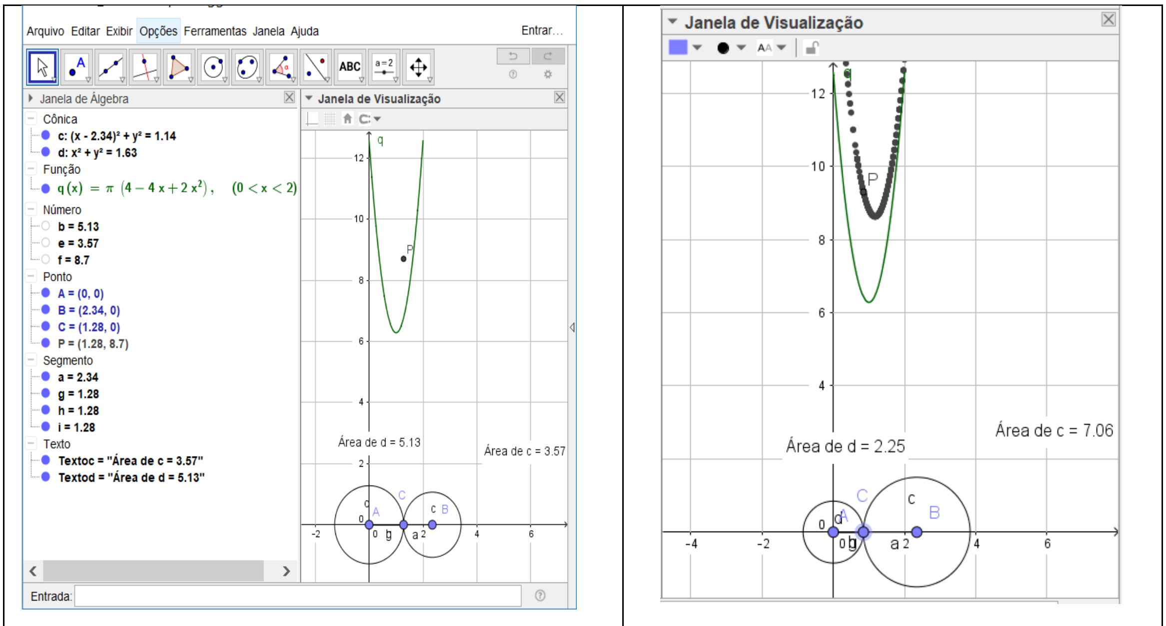
Figura 07: Soma das áreas dos círculos e sua função

Fonte: Acervo do Autor

Pretendíamos com essa tarefa investigativa que os professores cursistas observassem na Figura 07 (a) que o ponto P pertence ao gráfico da função para o segmento $\overline{AB} = 2$, já na Figura 07 (b), a intenção foi leva-los a investigar o que ocorre quando deslocamos o ponto B para um valor diferente, por exemplo maior que 2. Nota-se que o ponto P não estará mais sobre a parábola e com a movimentação do ponto C o ponto P se movimenta formando uma outra parábola. Assim sendo, para cada valor distinto do ponto B alteramos o tamanho do segmento $\overline{AB}$ da base, portanto alteramos os coeficientes da função quadrática, ou seja, temos uma nova função e por consequência alteramos também as circunferências. Nesse caso, com o segmento $\overline{AB} > 2$, tendem a um valor de máximo maior que o anterior.

10) Habilite exibir rastro para o ponto P e mova o ponto C. O que aconteceu, houve mudança nos círculos? E na função?

Na figura a seguir temos a construção do Professor W:



a) Segmento $\overline{AB} > 2$ | b) Rastro do ponto P para $\overline{AB} > 2$

Figura 08: Construção do Professor W, segmento AB>2

Fonte: Acervo do autor

Como já expressado anteriormente esperávamos que os sujeitos percebessem tanto a alteração dos círculos quanto da função. Após habilitarem o rastro do ponto P (vide Figura 08 (b)) eles observaram em suas telas que o movimento deste ponto descrevia outra parábola e de maneira assertiva disseram que sim, houve mudança tanto na parábola como nas circunferências.

Considerações finais

Esta atividade de cunho investigativo propiciou aos professores cursistas refletirem e levantarem conjecturas em situações que envolviam conhecimentos, tanto o tecnológico do conteúdo quanto o pedagógico do conteúdo, o pedagógico tecnológico, tendo em seu horizonte, o desenvolvimento do TPACK (conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo).

Na atividade aqui analisada, os professores estudaram um problema geométrico, relacionando-o a uma função quadrática e no seu decorrer surgiram dúvidas que tiveram de dissipar para a realização e compreensão da tarefa proposta.

O *software GeoGebra* foi a ferramenta que possibilitou a exploração e investigação fornecendo o feedback de cada ação desenvolvida, além de proporcionar a visualização de várias circunferências de modo dinâmico.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao Inep pela concessão da bolsa de estudos ligada ao Programa Observatório da Educação CAPES/Inep no qual se desenvolve a pesquisa que subsidiou este artigo. Agradeço, em especial, a colaboração dos professores de Matemática da Educação Básica da Rede Estadual de São Paulo que participaram do curso de formação continuada.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio**. Parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em 24 set. 2015.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, 108(6), 1017-1054, 2006.

OLIVEIRA, J.C.R., SANTOS, A.C., OMODEI, L.B.C. **O estudo de função quadrática por meio de uma área irregular: uma atividade de investigação com o auxílio do Geogebra**. EPREMXII 2014.Disponível em:

http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/RELATOS/titulos/RELA32.PDF . Acesso em: 10 out. 2015.

PERRENOUD, P. A. **Prática reflexiva no ofício de professor: profissionalização razão pedagógica**. trad. Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2002.

PONTE, J. P. **Da formação ao desenvolvimento profissional**. In Actas do ProfMat 98 (pp. 27-44). Lisboa: APM, 1998.

PONTE, J.P., & OLIVEIRA, H.: **Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial**. Revista da Educação, 11(2), 145-163,2002.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. **Uma abordagem à Análise de vídeo para investigar o desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes.** In: *Bolema* nº21, Ano 17, p 81-140, UNESP, Rio Claro. 2004.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. Education Researcher, vol. 15, n. 2. Fevereiro, 1986, p. 4-14.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa Ação.** Editora Cortez. Rio de Janeiro, 2003.